21 世纪高职高专规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

主　编　屈战涛　魏红梅

副主编　李瑞丹　徐平恒　王文萍

北京邮电大学出版社

www. buptpress. com

内 容 简 介

本书是以教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》及《高职高专教育专业人才培养目标及规格》为依据，结合高职高专院校在培养技术应用型人才方面的教学特点编写而成的。其主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、无穷级数、线性代数基础。

本书可作为高职高专院校各专业的教材，也可供相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/屈战涛，魏红梅主编. —北京：北京邮电大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5635-4059-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①屈… ②魏… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 168634 号

书　　名：高等数学
主　　编：屈战涛　魏红梅
责任编辑：边丽新
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京振兴源印务有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：27.25
字　　数：519 千字
版　　次：2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4059-4　　定　价：58.00 元(含学习指导与练习)

出版说明

高等职业教育以培养生产、建设、管理、服务第一线的高素质技能型专门人才为根本任务，在建设人力资源强国和高等教育强国的伟大进程中发挥着不可替代的作用。

近年来，我国高职高专教育蓬勃发展，积极推进校企合作、工学结合人才培养模式改革，办学水平不断提高，为现代化建设培养了一批高素质技能型专门人才，对高等教育大众化作出了重要贡献。尽管如此，我国高职高专教育的质量、结构、规模还不能很好地适应当前经济社会发展的需要，部分高职高专院校毕业生还不能很好地满足社会工作岗位对相关技术和能力的需求。

要加快高职高专教育改革和发展的步伐、全面提高人才培养质量，就必须对课程体系等问题进行深入探索。教育部在《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》中指出，“课程建设与改革是提高教学质量的核心，也是教学改革的重点和难点”，“建立突出职业能力培养的课程标准，规范课程教学的基本要求，提高课程教学质量”，这为高职高专教育课程体系建设指明了方向。在课程体系建设过程中，教材无疑起着至关重要的基础性作用，高质量的教材是培养高素质人才的重要保证。

目前，我国高等职业教育教学改革正在深入进行，高职教材建设取得了显著的成效。但从整体上看，教材建设仍不能很好地适应高职高专教育的发展需要，主要表现在：缺乏科学理论的支持，缺乏行业支持，缺少对生产实际的调查研究和深入了解，缺乏对职业岗位所需的专业知识和专项能力的科学分析，出现体系不明、内容交叉或重复、脱离实际、针对性不强等问题；与专业课程相配套的实践性教材严重不足；同类教材建设缺乏统一标准，相关课程的教材内容自成体系，缺乏沟通衔接；版本偏老或内容陈旧，不能及时将新法规、新知识、新技术、新工艺、新装备、新案例反映到教材中来；与劳动部门颁发的职业资格证书或技能鉴定标准缺乏有效衔接。教材的相对落后成为制约高职高专教育发展的瓶颈之一。

在此背景下，为了更好地贯彻《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》相关精神，更好地推进高职高专教育的发展，我们组织了一批具有丰富理论知识和实践经验的专家、一线教师，成立了21世纪高职高专规划教材编审委员会，着力规划出版一批符合高职高专教育特点和需求的优质教材。

依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教

育专业人才培养目标及规格》，我们调研了数百所具有代表性的高等职业技术学院和高等专科学校，广泛而深入地了解了高职高专教育的专业和课程设置，系统地研究了课程的体系结构；同时充分汲取各院校在探索培养应用型人才方面取得的成功经验，并在教材出版的各个环节设置专业的审定人员进行严格审查，从而确保了整套教材“突出行业需求，突出职业的核心能力”的特色。

本系列教材除了满足内容充实、完整，结构、体例合理，语言得体、流畅等基本要求外，还力求克服以往高职高专教材的缺陷和不足，在以下方面打造自己的优势和特色：

（1）本系列教材的定位更加强调“以就业为导向”。紧密依托行业或企业优势，建立产、学、研密切结合的运行机制，是高职高专教育健康发展的关键。我们通过对生产实际的调查研究和深入了解，对职业岗位（群）所需专业知识和专项能力的科学分析，以科学的课程理论为支持，力求使本系列教材定位与就业市场相结合，充分体现出“以就业为向导，以能力为本位，以学生为中心”的风格，从而更具实用性和前瞻性。

（2）本系列教材打破传统的教材编写模式，力求在编写风格和表达形式方面有所突破，充分体现“项目导向、任务驱动”的教学理念，通过构建具体的工作任务作为学生学习的切入点，这就促使学生能够主动学习，从而达到“教中做、做中学、学中练”的目的，全面提升学生解决问题的实战经验和能力。

（3）本系列教材编写思路清晰，体系结构安排合理，注重知识体系的有序衔接，力避知识的断层和重复。同时，教材也遵循教育部对高职高专教育提出的“以应用为目的，以必需、够用为度”原则，从实际应用的需要出发，减少枯燥、实用性不强的理论灌输。

（4）本系列教材的编写及时跟进社会及行业的最新发展动态，将最新、最权威、最具代表性的成果运用于教材当中，从而避免所讲知识与社会脱节。

为保证教材的总体质量和前瞻性，我们着重加强与示范性高等职业院校的合作，在全国范围遴选了具有丰富教学经验和实践经验、具有较高专业水平的双师型教师参加编写。

为支持“立体化”教学，我们为本系列教材精心策划了精品教学资料包和教学资源网，向教师用户提供教学课件、教学案例、教学参考、教学检测、教学资源推荐、课后习题答案等教学资源，以支持网络化及多媒体等现代化教学方式，有效提升教学质量。

希望各高职院校在使用本系列教材的过程中提出宝贵的意见和建议，我们将认真听取，不断完善。

21世纪高职高专规划教材编审委员会

前　言

高等数学课程是高职高专工科类、计算机类和经管类专业必修的重要基础课，它对提高学生的科学文化素质起着非常重要的作用，并为今后学生的学习、深造和发展奠定良好基础。

本教材是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并结合多年来高等数学课程的教学实践编写而成，可供高职高专的学生使用。在教材的编写过程中，编者结合高职高专教学的实际，积极贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，坚持理论联系实际，降低理论深度，并考虑知识的系统性，使教材由易到难，深入浅出。

本教材共分十章，主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、无穷级数、线性代数基础。

本书由郑州电力职业技术学院屈战涛、魏红梅任主编，郑州电力职业技术学院李瑞丹、徐平恒，新乡职业技术学院王文萍任副主编，具体编写分工如下：徐平恒编写第一章和第九章，魏红梅编写第二章和第四章，屈战涛编写第三章和第六章，王文萍编写第五章和第十章，李瑞丹编写第七章和第八章。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免存在不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　函　　数

微积分是高等数学课程的主要内容，它是从研究函数开始的. 函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型. 本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步理解函数概念，并介绍反函数、复合函数及初等函数的主要性质，为微积分的学习奠定必要基础.

第一节　函数及其性质

为了研究问题的方便，首先来介绍高等数学中经常需要用到的几个基本概念.

一、集合、区间及点的邻域

1. 集合

集合概念是数学中的一个最基本的概念，一般可以把**集合**（简称**集**）理解为具有某种特定性质的事物的总体. 例如，某学校全体师生组成的一个集合；某学校某个班级的全体同学组成的一个集合；全体实数组成的一个集合；全体正整数组成的一个集合等. 集合中的每个事物称为集合的**元素**（简称**元**）. 习惯上用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 如果元素 a 是集合 A 中的元素，记作 $a\in A$（读作 a 属于 A）；如果元素 a 不是集合 A 中的元素，记作 $a\notin A$（读作 a 不属于 A）.

如果一个集合只含有有限个元素，那么称这个集合为有限集；不是有限集的集合称为无限集. 例如，全体英文字母组成的一个集合是有限集，全体整数组成的集合是无限集.

给定一个集合，就是给出这个集合由哪些元素组成，给出集合的方法通常有两种：列举法和描述法.

列举法就是把集合中的所有元素都列举出来写在大括号内. 例如，由 1,2,3,4,5,6,7,8 八个数组成的集合 A 可记作

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

描述法就是把集合中所有元素的公共属性描述出来，记作

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$$

例如，

$$A = \{x \mid 0 < x < 6\}$$

表示满足不等式 $0 < x < 6$ 的实数.

$$B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

表示在 xOy 平面上以原点 O 为中心，半径为 2 的圆周及其内部所有点所组成的集合.

习惯上，全体实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$，即 $\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$；全体有理数组成的集合记作 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q} = \{x \mid x \text{ 为有理数}\}$；全体整数组成的集合记作 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z} = \{x \mid x \text{ 为整数}\}$；全体自然数组成的集合记作 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N} = \{x \mid x \text{ 为自然数}\}$.

设 A，B 是两个集合，如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 是集合 B 的**子集**，记作

$$A \subset B(\text{读作 } A \text{ 包含于 } B) \quad \text{或} \quad B \supset A(\text{读作 } B \text{ 包含 } A)$$

如果集合 B 与集合 A 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 B 与集合 A **相等**，记作

$$A = B$$

例如，集合 $A = \{2,3\}$，集合 $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$，则 $A = B$.

特别地，不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 并规定空集是任何集合的子集.

例如，$\{x \mid x^2 + 1 = 0 \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\}$ 是空集，因为满足条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的.

注意 以后用到的集合主要指数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是指实数.

集合的基本运算有以下几种：并、交、差.

设 A，B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A \backslash B$，即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

特别地，若集合 B 包含于集合 A（即 $B \subset A$），则称 $A \backslash B$ 为 B 关于 A 的**余集**，或

称为**补集**,记作 $\complement_A B$. 通常我们所讨论的问题是在一个大集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集,此时称 $I\backslash A$ 为 A 的余集,记作 $\complement_I A$ 或 A^C.

例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 5\}$ 的余集为

$$A^C=\{x\mid x<-3 \text{ 或 } x>5\}$$

集合的并、交、差运算满足下面的基本法则.

设 A,B,C 为三个任意集合,则下列法则成立:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A\backslash B)\cap C=(A\cap C)\backslash(B\cap C)$

(4) 幂等律　$A\cup A=A,\quad A\cap A=A$

(5) 吸收律　$A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cup B=B,\quad A\cap B=A$,其中 $A\subset B$

$A\cup(A\cap B)=A,\quad A\cap(A\cup B)=A$

(6) 对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

以上法则都可以利用集合的定义来验证.

在许多问题中还经常用到乘积集合的概念. 设 A,B 是任意两个非空集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,把有序对 (x,y) 作为新的元素,它们的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积,记作 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

例如,设 $A=\{x\mid a<x<b\},B=\{y\mid c<y<d\}$,则

$$A\times B=\{(x,y)\mid a<x<b,c<y<d\}$$

它表示 xOy 平面上以 $(a,c),(b,c),(b,d),(a,d)$ 为顶点的矩形内部的所有点构成的集合,而 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 就表示整个坐标平面,记作 $\mathbf{R}^2$.

2. 区间及点的邻域

区间就是实数轴上的一些实数的集合,它是用得较多的一类数集.

设 a、b 都是实数,且 $a<b$,则

(1) 开区间:$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$,这里 a、$b\notin(a,b)$,a 和 b 分别称为区间 (a,b) 的左、右端点.

(2) 闭区间:$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,这里 a、$b\in[a,b]$.

(3) 半开区间:$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$;$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$.

以上这些区间都称为有限区间,$b - a$ 称为区间的长度.

以后我们还要经常用到无限区间,无限的区间或半开区间表示如下

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$;$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$;

$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$;$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$;

常用无限开区间$(-\infty, +\infty)$表示全体实数的集合 $\mathbf{R}$.

区间用数轴表示如图 1-1-1 所示.

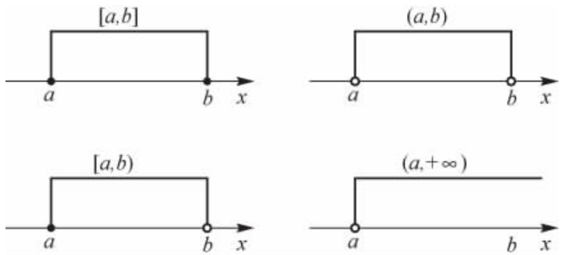


图 1-1-1

邻域也是一个经常遇到的概念.设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,数集

$$\{x \mid |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域 $U(a,\delta)$ 的半径,因为 $|x - a| < \delta$,相当于 $-\delta < x - a < \delta$,即 $a - \delta < x < a + \delta$,所以有

$$U(a,\delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

由此可以看出,邻域 $U(a,\delta)$ 所表示的就是开区间$(a - \delta, a + \delta)$,这个开区间就是以 a 为中心的,而长度为 2δ.

有时用到的邻域须把中心去掉.点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心(或空心)邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

邻域用数轴表示如图 1-1-2 所示.

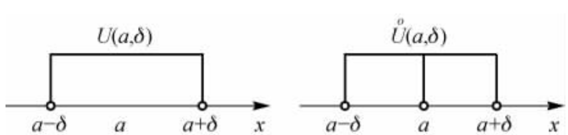


图 1-1-2

二、函数的基本概念

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中，人们会碰到许多用来表示不同事物的量，通常可将它们分为两类：一类是在某个问题的研究过程中保持不变的量，称之为常量；一类是在某个问题的研究过程中会出现变化，即可以取不同的值的量，称之为变量.

例如，学校的体育馆的面积是保持不变的，是常量；而每天来体育馆打球的人数是不同的，因而是变量.

又如，将一密闭的容器中的气体进行加热，在加热过程中，容器中气体的体积、分子数保持不变，是常量；而气体的温度、容器内的气压在不断变化，是变量.

在研究实际问题的过程中，常常发现有几个变量同时变化，它们并不是孤立的，它们不仅是相互联系的，而且还是遵循一定变化规律联系的，下面先举例说明两个变量的情形.

例 1　正方体的体积 V 与其边长 x 之间的关系为 $V = x^3$，这里 V 和 x 都是变量，当边长 x 变化时，其体积 V 也随之作相应的变化.

例 2　在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，如果取开始下落的时刻 $t = 0$，ī　　s 和 t 之间的关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad （g\ 为重力加速度）$$

表示，若物体到达地面的时刻 $t = T$，则在时间区间 $[0, T]$ 上任取一个数值时，由上面的公式都可以确定出 s 的对应值.

例 3　设某产品的固定成本为 100 万元，每生产 100 件成本就增加 4 万元，已知该商品市场前景看好，即产品可以全部销售出去，又知其需求量函数为 $q = 200 - 2p$（其中 p 表示销售单价）. 显然，总成本为

$$C(q) = 100 + 4q$$

总收益为

$$R(q) = pq = \frac{1}{2}(200 - q)q = 100q - \frac{1}{2}q^2$$

因此，总利润为

$$L(q) = R(q) - C(q) = 100q - \frac{1}{2}q^2 - (100 + 4q) = -\frac{1}{2}q^2 + 96q - 100$$

即总利润是随需求量的变化而变化的.

上面三个例子的实际意义虽然不同，但却有共同之处，每个例子所描述的变化过程都有两个变量，当其中一个变量在一定变化范围内取定一个数值时，按照某一

确定的法则，另一个变量有唯一确定的数值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系，在数学上就是函数的概念.

定义 设 D 为一个给定的实数集，对于每个 $x \in D$，按照某种对应法则 f，总存在唯一确定的实数值 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**，习惯上也称 y 是 x 的函数，并记作

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，实数集 D 称为这个函数 f 的**定义域**.

函数定义中，对于每个 $x \in D$，按照某种对应法则 f，总存在唯一确定的实数值 y 与之对应，这个实数值 y 称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$. 当 x 取遍实数集 D 的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 f 的**值域**.

值得注意的是记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值.

如果 $x_0 \in D$，则称函数 f 在点 x_0 处有定义或有意义；如果 $x_0 \notin D$，则称函数 f 在点 x_0 处无定义或无意义. 当 $x = x_0$ 时，函数 f 的值为 y_0，记为 $y_0 = f(x_0)$. 如果函数在某个区间 I 上每一点都有定义，就说这个函数在该区间 I 上有定义.

如果 y 是 x 的函数，有时也可记为 $y = g(x)$，$y = F(x)$，$y = \varphi(x)$ 或 $y = y(x)$ 等. 当讨论到几个不同的函数时，为了区别起见，需要用不同的记号来表示它们.

由于函数的定义域和对应法则被确定后，其值域就随之而定，因此定义域和对应法则就成了函数的两个要素. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则称这两个函数相同，否则就不同.

例 4 函数 $y = x^3$ 与 $y = t^3$，它们的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，且其对应法则都是“自变量的三次方”，因此，虽然表示变量的字母不同，但它们仍然是两个相同的函数. 可是对于函数 $y = \dfrac{1}{x+2}$ 与 $y = \dfrac{x}{x^2+2x}$，由于它们的定义域不同，所以它们是两个不同的函数. 对于函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 有相同的定义域，但当 $x < 0$ 时，两个函数的对应法则不同，所以它们也是两个不同的函数.

在研究函数时必须注意它的定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的. 如例 1 中定义域为 $D = (0, +\infty)$，例 2 中定义域为 $D = [0, T]$，例 3 中定义域为 $D = [0, 200)$.

在数学中，有时不Ж 函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时约定函数的定义域就是使得这个式子的运算有意义的所有实数值，这种定义域又称为函数的自然定义域.

通常情况下,求函数定义域时要注意以下几点:

(1) 分式中分母不能为零;

(2) 偶次根式中,被开方式的值非负;

(3) 对数式中的真数大于零,底数大于零且不等于1.

例5　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$ 的定义域.

解　要使 $f(x)$ 有意义,必须使 $9-x>0$,即 $x<9$,所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$ 的定义域为 $\{x\mid x<9\}$.

例6　求函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义,只有 $\dfrac{x}{x-2}>0$,即 $x>2$ 或 $x<0$,所以函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

一般情况下,表示函数的方法主要有三种:表格法、图形法、解析法(公式法).

用表格法表示函数是将函数自变量的值与对应的函数值列成表格的形式,如三角函数表、学生的成绩表等都是这种形式表示的函数.

用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形.

在用解析法表示函数时,有些函数在整个定义域范围内,可以用一个数学式子表示,但有些函数在其定义域的不同部分用不同数学式子才能表示,这类函数称为分段函数.值得注意的是,分段函数的定义域是几个不相交的子定义域的并集.求分段函数值时,应该把自变量的值代入相应的取值范围的式子中进行计算.

例如,函数 $y=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1\\ -x-1, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 是一个分段函数,其定义域为 $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$;

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时,　$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=-\dfrac{1}{2}$.

下面举几个函数的例子.

例7　函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数,它的定义域为 $(-\infty,+$

$\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，它的图象如图 1-1-3 所示.

例 8 函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，它的图象如图 1-1-4 所示.

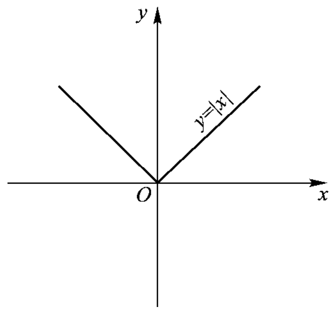


图 1-1-3

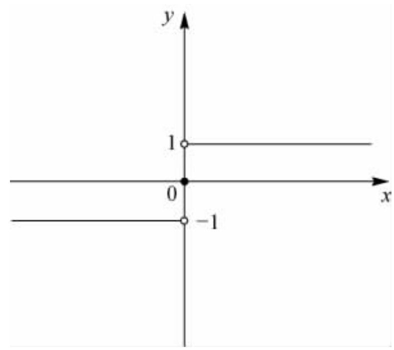


图 1-1-4

例 9 函数 $y=f(x)=[x]=n, n \leqslant x<n+1$，其中 n 为整数，记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如，$\left[\frac{3}{5}\right]=0,[\sqrt{3}]=1,[\pi]=3$，$[-1]=-1,[-4.6]=-5$.

显然，函数 $y=[x]$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为全体整数，它的图象如图 1-1-5 所示，这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1，这函数称为取整函数.

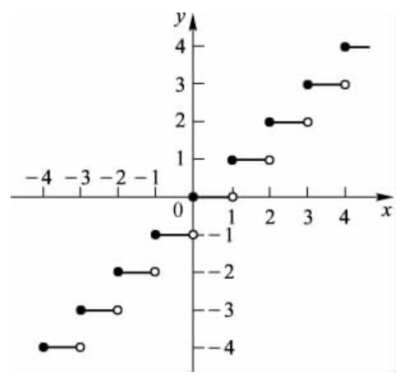


图 1-1-5

三、函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义.

1. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间，若对于任意 $x \in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

2. 周期性

若存在不为零的数 T，使得对于任意 $x \in I$，有 $x+T \in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

3. 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，区间 I 称为单调增区间；若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少，区间 I 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间.

4. 有界性

对于函数 $y=f(x)$，若存在正数 M，使得在区间 I 上恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

第二节　反函数与复合函数

为了进一步研究函数的概念，以方便今后研究函数的性态，本节介绍反函数和复合函数的概念.

一、反函数

在函数定义中，规定了对于每一个 x，都有唯一的 y 与之对应，这样定义的函数又称为单值函数；如果有两个或更多的数值 y 与之对应，就称 y 是 x 的多值函数. 本书主要讨论单值函数.

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的，任意一个变量都可根据需要作为自变量. 例如，在函数 $y=x+5$ 中，x 是自变量，y 是因变量，根据这个式子，可以解出 $x=y-5$，这里 y 是自变量，x 是因变量. 上面两个式子反映了同一个过程中两个变量之间地位的相对性，称它们互为反函数.

下面给出反函数的具体定义：

定义 1　设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意 $y \in M$，由函数关系式 $y=f(x)$ 恰好**唯一**确定出一个 $x \in D$ 与之对应，ī　认为 x 是 y 的函数，记作 $x=g(y)$，我们称上述的 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为**反函数**，习惯上将 $x=g(y)$ 记作

$$x=f^{-1}(y)$$

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常把 $y=f(x)$ 的反函数写作

$$y = f^{-1}(x)$$

由反函数的定义知,在定义区间上**单调**的函数必有反函数.

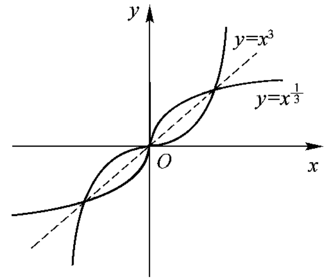


图 1-2-1

例 1 函数 $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,则 $x = f^{-1}(y) = \arcsin y, y \in [-1,1]$,故 $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数是$y = \arcsin x, x \in [-1,1]$.

若把函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象画在同一平面直角坐标系内,那么这两个图象关于 $y = x$ 对称.

例 2 函数 $y = x^3$ 和函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图象如图 1-2-1 所示.

一般地,要求 $y = f(x)$ 的反函数,只需先从 $y = f(x)$ 中解出 x 的表达式,当该表达式也是一个函数时,再将其中的字母 x, y 进行交换即可.

例 3 求函数 $y = 4x + 1$ 的反函数.

解 由 $y = 4x + 1$,解得

$$x = \frac{y-1}{4}$$

然后交换 x 和 y,得

$$y = \frac{x-1}{4}$$

故所求反函数为 $y = \frac{x-1}{4}$.

判断函数的反函数是否存在,可以用以下定理.

定理 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的,则在 W 上 $f(x)$ 的**反函数** $f^{-1}(x)$ **存在**,且 $f^{-1}(x)$ 在 W 上也是**单调增加**或**单调减少**的.

值得注意的是,由于对于 y 的某些值,满足 $y = f(x)$ 的 x 有时不止一个,所以并非任何函数在其定义域内都存在反函数. 但是,当我们对 x 的取值范围加以限制时,也有可能存在反函数. 例如,函数 $y = x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内不存在反函数,但在$(-\infty, 0)$ 及$[0, +\infty)$ 内却分别存在反函数 $y = -\sqrt{x}, 0 < x < +\infty$ 及 $y = \sqrt{x}, 0 \leqslant x < +\infty$.

对于分段函数求其反函数,只需分别求出与各子定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

例 4 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, & -2<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，求其反函数 $f^{-1}(x)$.

解 设 $y=f(x)$，则由反函数的定义，得

$$x=\begin{cases}3y, & -2<3y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}3y, & -\dfrac{2}{3}<y<\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$$

将 x,y 互换，得所求反函数为

$$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x, & -\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

二、复合函数

在很多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的. 例如，在函数 $y=\tan 3x$ 中，这个函数值不是直接由自变量 x 来确定的，而是通过 $3x$ 来确定的. 如果用 u 表示 $3x$，那么函数 $y=\tan 3x$ 就可表示成 $y=\tan u, u=3x$. 这说明了 y 与 x 的函数关系是通过变量 u 来确定的.

具有上述关系的函数，可以给出下面的定义：

定义 2 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，就称 y 是 x 的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为**中间变量**.

函数的复合中要注意的是，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，这样函数才能复合，否则复合就没有意义.

例 5 $y=e^{\cos x}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=\cos x$ 复合而成，$y=(1+\lg x)^3$ 是由 $y=u^3$ 和 $u=1+\lg x$ 复合而成，但函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=3+x^2$ 不能构成复合函数，因为对于任意的 x，$u=3+x^2$ 的值不在函数 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$内，从而复合出的函数 $y=\arcsin(3+x^2)$ 是没有意义的.

函数的复合也可以是多个函数的情形. 例如，$y=\lg u, u=v^2, v=x+1$，则复合函数是$y=\lg(x+1)^2$，其中 u,v 是中间变量.

利用复合函数的概念，可以把一个较复杂的函数分解成若干个简单函数. 下面举例分析复合函数的复合过程，正确熟练地掌握这个方法，将会给以后的学习带来很多方便.

例 6 写出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=a^{a^x}$;　　(2) $y=\cos^2 x^2$;

(3) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}$;　　(4) $y=\lg(3+\sqrt{x^3-1})$.

解　(1) $y=a^u,u=a^x$;

(2) $y=u^2,u=\cos w,w=x^2$;

(3) $y=\ln u,u=\sqrt[5]{v},v=\dfrac{w}{w-1},w=e^t,t=2x$;

(4) $y=\lg u,u=3+w,w=\sqrt{v},v=t-1,t=x^3$.

例 7　设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x>1 \\ \dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$, $g(x)=e^x$，求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解　因为 $f(x),g(x)$ 符合复合条件，所以

$$f[g(x)]=\begin{cases} e^x, & x>0 \\ e^{-x}, & x\leqslant 0 \end{cases};$$

$$g[f(x)]=\begin{cases} e^x, & x>1 \\ e^{\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

值得注意的是，求分段函数的复合函数时，特别要注意不同范围内的自变量、中间变量及函数之间的依赖关系.

第三节　初等函数

在初等数学中已经学习过下面几类函数：

(1) 幂函数：$y=x^\alpha$（$\alpha\in\mathbf{R}$ 是常数）；

(2) 指数函数：$y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）；

(3) 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）；

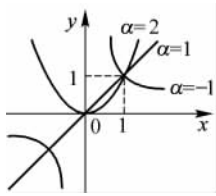
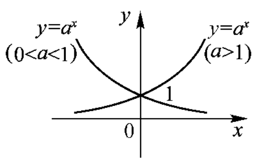
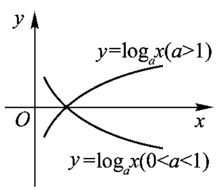
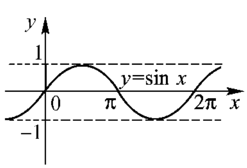
(4) 三角函数：$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$ 等；

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$ 等.

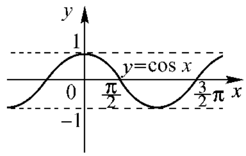
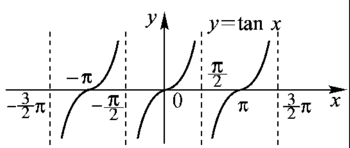
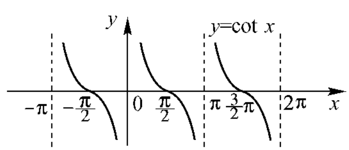
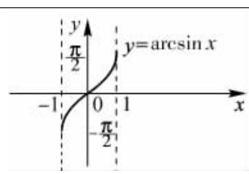
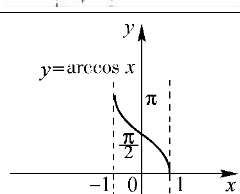
以上五类函数统称为**基本初等函数**.

为了今后学习和查阅方便，现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图象和特性列于表 1-1 中.

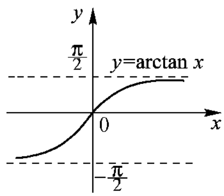
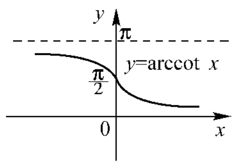
表 1-1

函 数	图 象	定义域和值域	主要性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$(α为实常数)		定义域:随 α 的不同而不同,但不论 α 取何值,x^{α} 在$(0,+\infty)$内总有定义; 值域:随 α 不同而不同	若 $\alpha>0$,x^{α} 在$[0,+\infty)$内单调增加; 若 $\alpha<0$,x^{α} 在$(0,+\infty)$内单调减少
指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$	$a^{0}=1$; 若 $a>1$,a^{x} 单调增加; 若 $0<a<1$,a^{x} 单调减少; 直线 $y=0$ 为函数图象的水平渐近线
对数函数 $y=\log_{a}x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	$\log_{a}1=0$; 若 $a>1$,$\log_{a}x$ 单调增加; 若 $0<a<1$,$\log_{a}x$ 单调减少; 直线 $x=0$ 为函数图象的垂直渐近线
正弦函数 $y=\sin x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	以 2π 为周期的函数; 在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加; 在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$上单调减少,其中$k\in\mathbf{Z}$; 奇函数

续表

函　　数	图　　象	定义域和值域	主要性质
余弦函数 $y=\cos x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	以 2π 为周期的函数； 在 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ 上单调增加，在 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 上单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$； 偶函数
正切函数 $y=\tan x$		$x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期的函数； 在 $(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调增加； 奇函数； 直线 $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ 为函数图象的垂直渐近线 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
余切函数 $y=\cot x$		$x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期的函数； 在 $(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调减少， 奇函数； 直线 $x=n\pi$ 为函数图象的垂直渐近线 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
反正弦函数 $y=\arcsin x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$	单调增加； 奇函数
反余弦函数 $y=\arccos x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$	单调减少； 非奇非偶函数

续表

函　　数	图　　象	定义域和值域	主要性质
反正切函数 $y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	单调增加； 直线 $y=-\frac{\pi}{2}$ 与 $y=\frac{\pi}{2}$ 为函数图象的水平渐近线； 奇函数
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$	单调减少； 直线 $y=0$ 及 $y=\pi$ 为函数图象的水平渐近线； 非奇非偶函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤得到的用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\sin^3(2x+1)$，$y=5\log_2(x^2+4x+7)$，$y=\arcsin a^{\frac{x}{3}}+x\sqrt[3]{3x+2}$ 等都是初等函数. 而分段函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x-1, & x<0\end{cases}$$

是由几个式子表示的函数，因而不是初等函数. 但是，由于分段函数在其子定义域内通常都是初等函数，所以仍可通过初等函数来研究它们.

在工程技术中经常要用到一类初等函数是双曲函数，它们是由指数函数 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 生成的初等函数，它们的定义和符号如下：

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，其图象如图 1-3-1 所示；双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，其图象如图

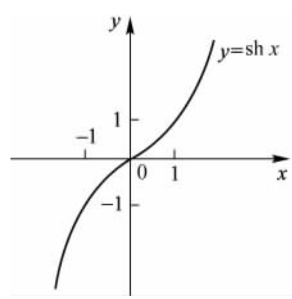


图 1-3-1

1-3-2 所示;双曲正切函数 $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$,其图象如图 1-3-3 所示;双曲余切函数 $\operatorname{cth} x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}$,其图象如图 1-3-4 所示.

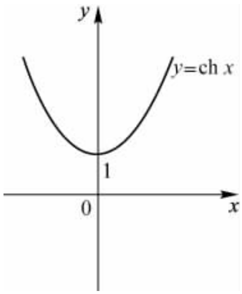


图 1-3-2

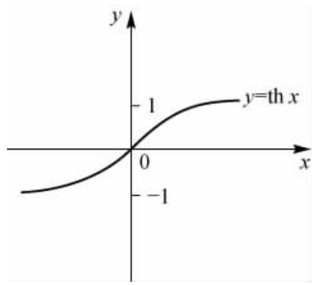


图 1-3-3

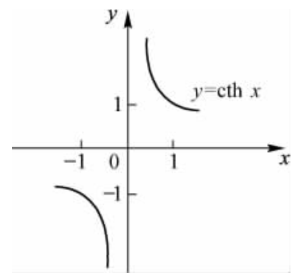


图 1-3-4

其中 $\operatorname{sh} x$,$\operatorname{th} x$,$\operatorname{cth} x$ 都是奇函数,$\operatorname{ch} x$ 是偶函数.

$\operatorname{sh} x$,$\operatorname{ch} x$,$\operatorname{th} x$ 的反函数称为反双曲函数,分别记作

反双曲正弦　　$y=\operatorname{arsh} x$

反双曲余弦　　$y=\operatorname{arch} x$

反双曲正切　　$y=\operatorname{arth} x$

同样,反双曲函数可以通过自然对数函数来表示,这里不作介绍.

用数学工具解决实际问题时,往往需要建立相应的数学模型,其中一类较简单的问题是建立函数关系.下面给出两个例子.

例 1　某工厂生产电视机,年产量为 x 台,每台售价 1 200 元.当年产量在 500 台以内,可以全部售出.经广告宣传后又可以再多出售 300 台,每台平均广告费为 40 元,若生产再多,本年就销售不出去了.试建立本年的销售总收入 y 与年产量 x 的关系.

解　因为总收入 = 产量 × 单价,根据题意可列出函数关系如下:

$$y=\begin{cases}1\,200x, & 0\leqslant x\leqslant 500\\ 1\,200\times 500+(1\,200-40)(x-500), & 500<x\leqslant 800\\ 1\,200\times 500+1\,160\times 300, & x>800\end{cases}$$

例 2　某单位要建造一个容积为 V 的长方体水池,它的底为正方形.如果池底的单位面积造价为侧面积造价的 2 倍,试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

解　设底面边长为 x,总造价为 y,侧面积单位造价为 m.由已知可知水深为 $\dfrac{V}{x^{2}}$,

侧面积为 $4x \cdot \frac{V}{x^2} = \frac{4V}{x}$,根据题意可得函数关系如下：

$$y = 2mx^2 + 4m\frac{V}{x},\quad 0 < x < +\infty$$

第二章　极限与连续

极ж　连续是高等数学中的两个重要概念.极限既是用来刻画变量在变化过程中变化趋势的一个基本概念,又是研究高等数学的重要工具和思想方法.连续是函数的一种重要性态,也是高等数学中的一个主要研究对象.本章将介绍极ж　连续的基本概念及性质,理解极限的概念是学好高等数学的关键.

第一节　极限的概念

一、数列的极限

1.数列的定义

定义 1　自变量为正整数的函数 $u_n = f(n)(n = 1,2,\cdots)$,其函数值按自变量 n 由小到大排列成一列数

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$$

称为数列,将其简记为$\{u_n\}$,其中 u_n 称为数列$\{u_n\}$的通项或一般项.例如,$u_n = \dfrac{1}{n+1}$,相应的数列为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n+1}, \cdots$$

由于一个数列$\{u_n\}$完全由其一般项 u_n 所决定,所以经常把数列$\{u_n\}$简称为数列 u_n.

例 1　已知下列数列的通项 u_n,试写出各数列$\{u_n\}$.

(1)$u_n = \dfrac{n}{n+1}$;(2)$u_n = 2n+1$.

解　(1)$\{u_n\}$:$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$

(2)$\{u_n\}$:$3, 5, 7, \cdots, 2n+1, \cdots$

如果数列$\{u_n\}$对于每个正整数 n,都有 $u_n < u_{n+1}$,则称数列$\{u_n\}$为单调递增数列;如果数列$\{u_n\}$对于每个正整数 n,都有 $u_n > u_{n+1}$,则称数列$\{u_n\}$为单调递减数

列. 如果对于数列$\{u_n\}$,存在一个正常数M,使得对于每一项u_n,都有$|u_n|\leqslant M$,则称数列$\{u_n\}$为有界数列.

2. 数列的极限

在我国庄周时代《庄子·天下篇》中曾载有惠施(约公元前370—前310年)的说法:"一尺之棰,日取其半,万世不竭."此时已经有了"数列极限"的思想. 到公元三世纪,我国古代杰出的数学家刘徽又根据"数列极限"的思想给出了圆面积公式. 下面我们给出数列极限的定义.

定义2　对于数列$\{u_n\}$,如果当n无限增大时,通项u_n无限接近于某个确定的常数A,则称A为数列$\{u_n\}$的极限,或称数列$\{u_n\}$收敛于A,记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \text{ 或 } u_n \to A(n\to\infty).$$

若数列$\{u_n\}$没有极限,则称该数列发散.

例2　观察下列数列当$n\to\infty$时的极限.

(1)$u_n=\dfrac{n}{n+1}$;　　(2)$u_n=\dfrac{1}{2^n}$;

(3)$u_n=2n+1$;　　(4)$u_n=(-1)^n$.

解　对于每一个数列,我们先将数列列出来,再根据极限的定义,观察各个数列在$n\to\infty$时发展趋势,可得

(1)$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$;

(2)$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$;

(3)$3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots\ \lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)$不存在;

(4)$-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots\ \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在.

应当注意,在一个变量前加上记号"lim",表示对这个变量进行取极限运算,若变量的极限存在,所反映的不再是这个变量本身而是它的极限,即变量无限接近的那个数. 例如,设A表示圆面积,S_n表示圆内接正n边形面面积,则知当n较大以后,总有$S_n\approx A$,但$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$就不再是$S_n$,而是它的极限——圆面积$A$,所以它的表达式$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不含任何近似成分.

3. 数列极限的精确定义

设$\{x_n\}$为一数列,如果存在常数A,对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数N,使得当$n>N$时,不等式$|x_n-A|<\varepsilon$成立,那么就称数列$\{x_n\}$以A为极限,或称数列$\{x_n\}$收敛于A,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A(n\to\infty)$.

二、函数极限的概念

把数列极限概念中的函数为 $f(n)$ 而自变量的变化过程为 $n \to \infty$ 等特殊性撇开，可以引入函数极限的概念. 在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的数值，那么这个确定的数值就称为在这一变化过程中函数的极限. 由于自变量的变化不同，函数的极限就表现为不同的形式.

下面介绍自变量 x 变化过程的两种不同情形时函数 $f(x)$ 的极限.

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

现在ж 自变量 x 无限接近于有限值 x_0 或说趋于有限值 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形. 有如下定义.

定义 3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域内有定义，如果在 $x \to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么称 A 是**函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A(x \to x_0)$$

从定义 3 中可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否存在极ж $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

例如，$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$，如图 2-1-1 所示. 这里函数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处没有定义，但是它的极限却存在且为 2.

例 3 求下面函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} C$（$C$ 为常数）；　(2) $\lim\limits_{x \to x_0} x$；　(3) $\lim\limits_{x \to 1}(x+2)$.

解 (1) 因为 C 为常数，当 x 无限接近于 x_0 时，C 不变，如图 2-1-2 所示，因此 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$；

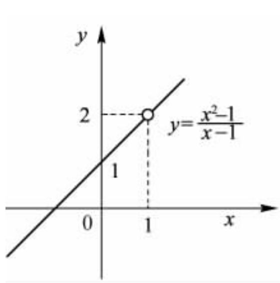


图 2-1-1

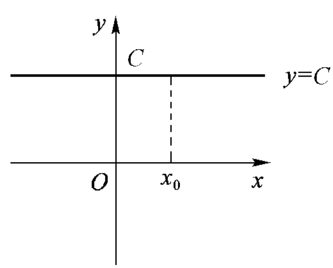


图 2-1-2

(2) 因为当 $x \to x_0$ 时，$x \to x_0$，如图 2-1-3 所示，因此 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$；

(3) 因为当 x 无限接近于 1 时，$x + 2$ 就无限接近于 3，如图 2-1-4 所示，因此 $\lim\limits_{x \to 1}(x + 2) = 3$.

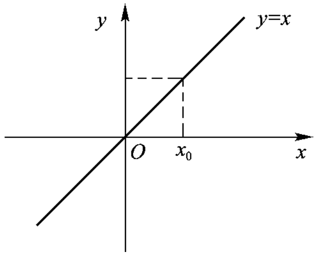


图 2-1-3

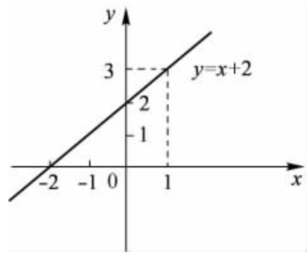


图 2-1-4

在Ж 函数 $f(x)$ 的极限的时候，如果自变量 x 沿着小于(或大于)x_0 的方向趋于 x_0，那么称 x 从左(或右) 侧趋于 x_0，记为 $x \to x_0^-$(或 $x \to x_0^+$).

如果当 $x \to x_0^-$(或 $x \to x_0^+$) 时，$f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么称 A 是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左(或右) 极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

左极Ч 右极限统称为单侧极限.

根据 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义，以及左右极限的定义，容易得到下面的结论：

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

因为当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在，或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等时，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 的极限是不存在的，因此上述结论可以用来判断函数的极限是否存在.

例 4　求函数 $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处的极限.

解　因为

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(3x - 1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(x + 1) = 2$$

从而

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

所以

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

例 5　函数 $f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x > 0 \\ -x + 1, & x \leqslant 0 \end{cases}$，试判断 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 是否存在.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-x-1) = -1$$

从而

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

例 6 函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x > 1 \\ 0, & x \leqslant 1 \end{cases}$,试判断$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$是否存在.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$不存在,所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

现在Ж 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大即趋于无穷大时,对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形,有如下定义.

定义 4 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义,如果在 $x\to\infty$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A,ī A 称为**函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

如果把 x 取正值且无限增大,称为 x 趋于正无穷大,记作 $x\to+\infty$,而把 x 取负值且 $|x|$ 无限增大,称为 x 趋于负无穷大,记作 $x\to-\infty$. 这样,函数 $f(x)$ 在这两种极限过程下的极限,分别记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

根据上述定义,显然有下面结论成立:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的**充分必要条件**是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

因为当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 中至少有一个不存在,或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在,但不相等时,$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 的极限是不存在的. 因此上述结论也可以用来判断函数的极限是否存在.

例 7 求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}(x\neq 0)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解 由函数的图象(如图 2-1-5 所示)容易看出,当 x 往左或右无限增大时,$f(x)$ 都无限接近于 0,所以有

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

例 8 考察极限$\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 是否存在.

解 因为从图形(如图 2-1-6 所示)上可以看出

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

而
$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x \neq \lim_{x \to -\infty} \arctan x$$

所以$\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ 不存在.

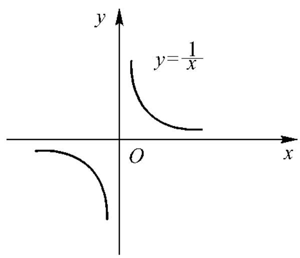


图 2-1-5

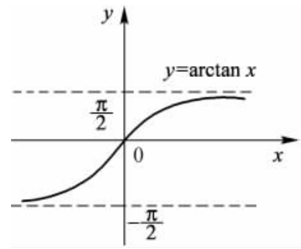


图 2-1-6

三、函数极限的性质

性质 1(函数极限的唯一性)　如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,那么它的极限是唯一的.

性质 2(局部有界性)　如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界.

性质 3(局部保号性)　如果给定函数 $f(x)$,$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 且 $A > 0$(或 $A < 0$),那么在 x_0 的某一去心邻域内,有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

性质 4(夹逼准则)　如果函数 $g(x)$,$f(x)$,$h(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内,满足下列条件:

$$(1)\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x);$$
$$(2)\ \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A.$$

则函数 $f(x)$ 的极限存在,且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

以上极限性质是以 $x \to x_0$ 为例,对其他极限过程和数列的极限有同样的结论成立,这里不再叙述.

第二节　极限的运算法则

一、函数极限的运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

以上函数极限的四则运算可以推广到有限多个收敛函数的情形. 由积的运算可以得到下面两个结论：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f^m(x)=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^m=A^m$（$m$ 为正整数）.

例 1　求$\lim\limits_{x\to 3}(3x^2+2x+1)$.

解　$\lim\limits_{x\to 3}(3x^2+2x+1)=3\lim\limits_{x\to 3}x^2+2\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}1=3\times 3^2+2\times 3+1=34$

例 2　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解　这里分母的极限不为 0，故

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-5\times 2+3}=-\frac{7}{3}$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解　由于分母的极限为 0，故不能直接用商的运算法则，但是当 $x\neq 3$ 时，

$$\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{x+3}$$

所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$$

例 4　求$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2})$.

解　因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}$和$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1-x^2}$的极限不存在，故不能直接使用极限的运算法

则. 当 $x \neq 1$ 时，

$$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1+x-2}{1-x^2}=-\frac{1}{1+x}$$

所以
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{1}{2}$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2-4x+5}$.

解　将分子、分母同除以最高次幂 x^2，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{2+3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{3-4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

例 5 是下列一般情形的特例，即当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$ 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$$

成立. 利用这个结果可以很方便地求解有理分式当 $x\to\infty$ 时的极限.

二、复合函数的极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(1-\sin x)$.

解　因为
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)=0,\lim_{u\to 0}\cos u=1$$

由复合函数求极限法则知

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(1-\sin x)=1$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\mathrm{e}^x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x=1$，$\lim\limits_{u\to 1}\sin u=\sin 1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\mathrm{e}^x)=\sin 1$.

三、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

证 作单位圆如图2-2-1所示，取$\angle AOB = x$(rad)，于是有$BC = \sin x$，弧$AB = x$，$AD = \tan x$. 比较$\triangle OAB$、扇形OAB、$\triangle OAD$的面积，得

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

由上式可得 $\qquad \sin x < x < \tan x$

除以$\sin x$，有 $\qquad \cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

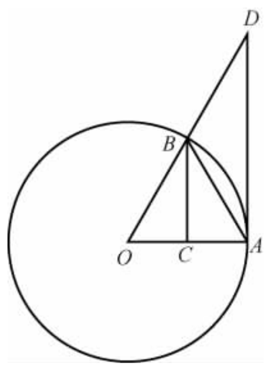


图 2-2-1

这一关系是当$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时得到的，但因当x用$-x$代替时，$\cos x$，$\dfrac{\sin x}{x}$都不变号，所以，x为负时，关系式也是成立的.

因为$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$，又$\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$，于是，由夹逼法则知

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

为了强调其形式，我们把它形象地写成

$$\lim_{\square \to \infty} \frac{\sin \square}{\square} = 1.$$

例 8 求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1.$

例 9　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}$.

例 10　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x\sin x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2\times 1\times 1=2$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

数e无论在数学理论还是实际问题应用中都有重要作用.物体的冷却、放射元素的衰变等都要用到这个极限.

关于这个极限,我们不作理论推导,但应知道:

当$x\to\infty$时,$(1+\dfrac{1}{x})^x$的极限是存在的,并且是一个无理数,其值为e,即

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

为了准确用好这个极限,要注意它的两个特征,一是它属于1^∞型极限;二是它可以形象地表示为

$$\lim_{\square\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square}=e.$$

如果令$\dfrac{1}{x}=t$,当$x\to\infty$时,$t\to 0$,公式还可以写成

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$

例 11　求$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x})^x$.

解　令$\dfrac{x}{3}=u$,则$x=3u$,于是

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{3u}=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{u})^u\right]^3=e^3.$$

例 12　求$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-2}=e^{-2}$.

例 13 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x}$.

解 令$\dfrac{2-x}{3-x}=1+\dfrac{1}{u}$,解得$x=u+3$,当$x\to\infty$时,$u\to\infty$.于是$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{3}=\mathrm{e}.$

第三节 无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 1 如果函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的极限为零,那么称函数为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的**无穷小量**,简称**无穷小**.

例如,$f(x)=2x-4$是$x\to 2$时的无穷小,而不是$x\to 0$时的无穷小;$g(x)=\dfrac{1}{2x-1}$是$x\to\infty$时的无穷小.

注意 无穷小是一个变量(或函数),而不是一个定数,所以不能把无穷小和很小的数(如百万分之一)混为一谈,零是可以作为无穷小的唯一的常数,因为在任何极限过程中,均有$\lim\limits_{x\to x_0}0=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}0=0$成立.

根据极限的性质和四则运算法则,可以证明下列有关无穷小的性质.

性质 1 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

性质 2 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

推论 1 常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积仍是无穷小

注意 性质1和推论2都不能推广到无穷多个无穷小;另外,两个无穷小之商未必是无穷小.

例如,x和$3x$都是当$x\to 0$时的无穷小,但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$,所以$\dfrac{x}{3x}$不是当$x\to 0$时的无穷小.

例 1 证明$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证 因为$\sin\dfrac{1}{x}$为有界函数,且当$x\to 0$时,x为无穷小,所以当$x\to 0$时,$x\sin\dfrac{1}{x}$为无穷小,故有

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

关于函数极限与无穷小的关系有下面定理.

定理 1　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的**充分必要条件**是

$$f(x) = A + \alpha$$

其中 α 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

证　充分性:因为 $\alpha = f(x) - A$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小,根据无穷小的定义,

$$\lim_{x \to x_0} \alpha = 0, \quad \lim_{x \to x_0}[f(x) - A] = 0$$

由极限的四则运算法则,可得

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}\{A + [f(x) - A]\} = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0}[f(x) - A] = A + 0 = A$$

必要性:设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,由极限的四则运算法则,可得

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - A] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0$$

令 $\alpha = f(x) - A$,则 $f(x) = A + \alpha$,其中 α 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

该定理表明,函数极限存在的充分必要条件为函数可表示为它的极限值与一个无穷小和的形式,这个定理也适合用于 $x \to \infty$ 的情形.

二、无穷大

定义 2　如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,就称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的**无穷大量**,简称**无穷大**.

当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大的函数 $f(x)$,用极限定义来说,极限是不存在的,但为了便于叙述函数的这一性态,我们也说"函数的极限是无穷大",并记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

必须注意到,无穷大是一个绝对值可以任意大的变量(或函数),而不是一个很大的数,不能与很大的数(如 100 万)混为一谈.

例如,由 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x^2 - 4} = \infty$ 知 $\dfrac{1}{x^2 - 4}$ 是 $x \to 2$ 时的无穷大;由 $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ 知 e^x 是 $x \to +\infty$ 时的无穷大.

无穷小与无穷大之间有如下关系.

定理 2　在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为**无穷大**,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为**无穷小**;反之,如果 $f(x)$ 为**无穷小**,且 $f(x) \neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为**无穷大**.

下面利用无穷大与无穷小之间的关系来求一些函数的极限.

例 2 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$,所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-2}{x^2+3}$.

解 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^3-x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}}=0$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-2}{x^2+3}=\infty$$

三、无穷小的比较

我们知道,当 $x\to 0$ 时,$2x$,x^2,$\sin x$ 都是无穷小,而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2}=\infty$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,两个无穷小之比的极限的各种不同情况,反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度不同.

下面我们就无穷小之比的极限存在或为无穷大时,来说明两个无穷小间的比较.

定义 3 设 $\alpha(x)$,$\beta(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷小,且 $\alpha(x)\neq 0$.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$,则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ **高阶无穷小**,也称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **低阶无穷小**;

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=k\neq 0$,则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ **同阶无穷小**,特别地,当 $k=1$ 时,称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ **等价无穷小**,记作

$$\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$$

例如,因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0$,所以当 $x\to 0$ 时,x^2 是比 $2x$ 高阶无穷小,$2x$ 是比 x^2 低阶无穷小;因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,所以当 $x\to 0$ 时,$\sin x$ 与 x 是等价无穷小,记为 $\sin x\sim x$.

等价无穷小对化简极限计算非常有用,常用的**等价无穷小**如下.

当 $x\to 0$ 时,

$\sin x \sim x$　　　$\tan x \sim x$　　　$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$\ln(1+x) \sim x$　　　$e^x - 1 \sim x$　　　$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

关于等价无穷小在求极限中的应用,有下面定理:

定理 3　设当 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x) \sim \alpha'(x)$,$\beta(x) \sim \beta'(x)$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$ 存在,则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$$

证　因为
$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{\beta(x)}{\beta'(x)} \cdot \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$$
两边同时取极限,得
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\beta'(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$$

根据此定理,在求两个无穷小之比的极限时,如果所求极Γ　好求,可用分子、分母各自的等价无穷小来替代,如果选择适当,可以简化运算.

下面给出几个利用等价无穷小来计算极限的例子.

例 4　求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{\ln(1+3x)}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时,$\tan x \sim x$,$\ln(1+3x) \sim 3x$,所以
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

例 5　求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 3x}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时,$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,$\tan 3x \sim 3x$,所以
$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{(3x)^2} = \frac{1}{18}$$

例 6　求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{4}} - 1}{\sin^2 x}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时,$\sin x \sim x$,$\sqrt[4]{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{4}x^2$,所以
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{4}} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4}x^2}{x^2} = \frac{1}{4}$$

必须指出的是,在用等价无穷小的替代时,只有对分子分母中的**乘积因子**才能

替代,而对函数中的加减运算的项不能替代.

例 7 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{x^2}{2x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$

如果直接用等价无穷小替代,那么有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$,这样做就得出了错误的答案.这是因为在条件 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$ 之下,一般没有 $\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$ 的结论.

第四节　函数的连续性

连续性是函数的重要性态之一,它不仅是函数研究的重要内容,也为计算函数的极限开辟了新途径.这里,我们将运用极限概念对函数的连续性加以描述和研究,并在此基础上解决更多的极限计算问题及连续函数的应用问题.

一、连续函数的概念

为了建立连续性的定义,我们先引入增量的概念.

设变量 u 从一个初值 u_1 变化到终值 u_2,终值与初值之差 u_2-u_1 称为变量 u 的增量,记作 Δu,即 $\Delta u=u_2-u_1$,Δu 可以为正,也可以为负.当 $\Delta u>0$ 时,u 的变化是增大的;$\Delta u<0$ 时,u 的变化是减小的.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域内有定义,当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时,函数 y 相应由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$,因此函数相应的增量为 $\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_0)$.其几何意义如图 2-4-1 所示.

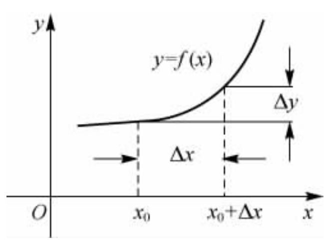


图 2-4-1

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,如果自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时,对应的函数增量也趋于零,即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是连续的.

由于 Δy 也可写成 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$，所以定义 1 中的表达式也可以写为

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0,\text{即}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

定义 2　设函 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都是连续的，就称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续. 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $x = a$ 处右连续，在 $x = b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

连续函数的图象是一条连绵不断的曲线.

由定义 2 可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，必须同时满足以下三个条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

(3) 上述极限值等于函数值 $f(x_0)$.

如果上述条件中至少有一个不满足，则称点 x_0 就是函数 $f(x)$ 的间断点.

二、函数的间断点及其分类

定义 3　设 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点，如果当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的左、右极限都存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点；否则，称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点. 对于第一类间断点还有如下定义：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 均存在，但不相等时，称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点；

(2) 当 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但不等于 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值时，称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点，无穷间断点属于第二类间断点.

例 1　设 $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x + 1, x > 1 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的连续性.

解　因为

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(x+1) = 2$$

即$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$不存在.

所以,$x=1$是$f(x)$的第一类间断点,且为跳跃间断点(如图2-4-2所示).

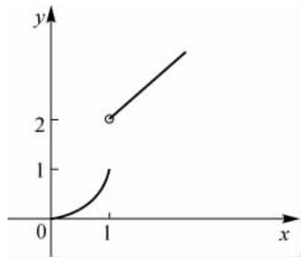


图 2-4-2

例 2 设$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4}{x}, x \neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$,讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性.

解 因为$f(0)=1$,且

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x} = 0,$$

即$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

所以,$x=0$是$f(x)$的第一类间断点,且为可去间断点.

三、初等函数的连续性

1. 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.因此,求初等函数的连续区间就是其定义区间.关于分段函数的连续性,除ж 每一段函数的连续性外,还必须讨论分界点处的连续性.

2. 利用函数的连续性求极限

由定义2知,如果$f(x)$在x_0处连续,有$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,这就表明,求连续函数的极限,可以归结为计算函数值.

例 3 求$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}[\ln(\sin x)]$.

解 因为$\ln(\sin x)$在$x=\dfrac{\pi}{2}$处连续,所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin x)] = \ln(\sin\frac{\pi}{2}) = \ln 1 = 0.$$

3. 复合函数求极限的方法

定理 1　设有复合函数 $y = f[\varphi(x)]$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = a$，而函数 $f(u)$ 在 $u = a$ 点连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)] = f(a).$$

这说明在求复合函数的极限时，如果复合函数连续，则在计算复合函数的极限时，极限符号可以移到函数符号之后.

例 4　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln \mathrm{e} = 1.$

四、闭区间上连续函数的性质

定理 2　闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值.

定理 3(零点定理)　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$. 这个定理又称为根的存在定理.

从几何上看如图 2-4-3 所示，连续曲线 $y = f(x)$ 从 x 轴下侧的点 A(纵坐标 $f(a) < 0$) 笔不离纸地画到 x 轴上侧的点 B(纵坐标 $f(b) > 0$) 时，必与 x 轴至少相交于一点 $C(\xi,0)$.

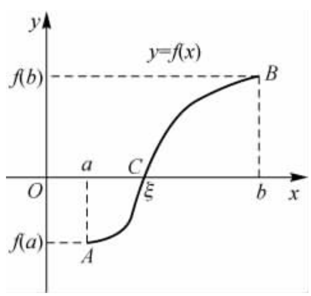


图 2-4-3

例 5　证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证　令 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0) = 1 > 0$，$f(1) = -2 < 0$，于是根据零点定理，在开区间 $(0,1)$ 内，至少有一点 ξ，使得 $f(\xi) = 0$. 这就说明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

定理 4(介值定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，μ 为

介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \mu$.

定理 4 从几何上看如图 2-4-4 所示，闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $y = f(x)$ 的图象从 A 画到 B 时，至少要与直线 $y = \mu$ 相交一次.

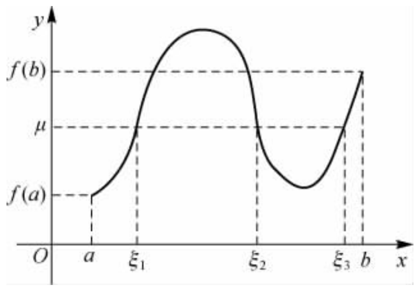


图 2-4-4

第五节　多元函数及其极限与连续

一、多元函数的概念

在很多实际问题中，事物的发生和发展是受多种因素制约的，在数学上表现为一个变量的变化要依赖其他多个变量的变化的问题，这就提出了多元函数的相关问题.

在学习一元函数时，经常会遇到区间和邻域等概念，为了将一元函数推广到二元以上的函数，我们首先介绍区域的概念.

1. 区域

由于实数可与数轴上的点对应起来，而全体数轴上的点就构成一维空间，记为 $\mathbf{R}$. 二元有序实数组 (x,y) 和平面上点的全体建立起一一对应关系. 平面上所有点构成了二维空间，记为 $\mathbf{R}^2$. 一般地，n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 点的全体称为 n 维空间，记为 $\mathbf{R}^n$.

通常，**平面区域**指平面上由一条曲线或几条曲线围成的部分. 区域可以是有限的，如圆形区域，矩形区域等，这种区域称为**有界区域**. 有些区域能够延伸到无穷远处，这种区域称为**无界区域**. 围成区域的曲线称为**区域的边界**. 若所Ж　的区域包含区域的全部边界，称此区域为**闭区域**；若不包含区域的边界，称为**开区域**.

例如，

$$D_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

表示了二维平面上以原点为圆心，以 1 为半径的圆形区域，并且包括其边界，因此是

有界闭区域.

$$D_2 = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$$

表示了二维平面上第一象限内所有点的集合,不包含 x 轴和 y 轴,因此是无界的开区域.

$$D_3 = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2, \delta > 0\}$$

表示了二维平面上以 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心,以 δ 为半径的圆形区域,且不包括边界,称为平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域,记为 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$$

或者

$$U(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

$$D_4 = \{(x,y) \mid 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2, \delta > 0\}$$

表示了二维平面上不包括点 $P_0(x_0,y_0)$ 的圆形区域,称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 空心邻域,记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$. 即

$$\mathring{U}(P_0,\delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}$$

2. 二元函数的定义

在实际问题中,经常需要Ж　一个变量与另外两个变量之间的关系.

例 1　圆柱体的体积 V 与底面圆的半径 r 和柱体的高度 h 具有关系式

$$V = \pi r^2 h$$

当 r,h 在区域 $\{(r,h) \mid r > 0, h > 0\}$ 内取定一对值时,V 就可以取得对应的值.

例 2　在物理学定理中,电流所做的功率 P 与电路电压 U 和电流 I 之间有关系式

$$P = UI$$

当 U,I 在区域 $\{(U,I) \mid U > 0, I > 0\}$ 内取定一对值时,功率 P 也随之确定了.

从这两个例子中可以发现它们的共同特点,从而可以抽象出二元函数的定义.

定义 1　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空点集,若对每一点 $(x,y) \in D$,按照某一法则 f 有唯一确定的实数值 z 与之对应,则称 z 是关于变量 x,y 的**二元函数**,记为

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

其中点集 D 称为该函数的定义域,x,y 称为自变量,z 称为因变量. 当 (x,y) 取确定值之后,对应的因变量 z 的值称为 f 在点 (x,y) 处的函数值. 函数值 $f(x,y)$ 的全体构成的集合称为 f 的值域.

一般地,设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为 n 维空间中的非空点集,若对 D 中每一个点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 按照某一法则 f 都有唯一确定的实数值 z 与之对应,则称 z 是自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元函数,记为

$$z = f(x_1,x_2,\cdots,x_n), \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in D$$

关于多元函数的定义域，我们约定：

讨论用算式表达的多元函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 时，函数的定义域就是使得此函数有意义的自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的范围.

例 3 讨论下列函数的定义域.

(1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$；

(2) $z=\ln(x+y)$；

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.

解 (1) 要使函数有意义，必须有

$$9-x^2-y^2\geqslant 0$$

因此，所求函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 9\}$$

这里 D 是以原点为圆心，3 为半径的圆形的闭区域，如图 2-5-1 所示.

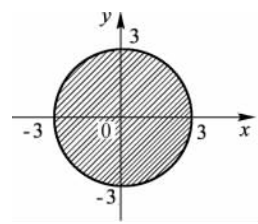


图 2-5-1

(2) 要使函数有意义，必须有

$$x+y>0$$

因此，所求函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$$

这里 D 为直线 $y=-x$ 以上的部分，为无界开区域，如图 2-5-2 所示.

(3) 只有当

$$x+y>0,\quad x-y>0$$

同时成立时，原函数才有意义. 因此，所求函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid -x<y<x\}$$

这里 D 为图 2-5-3 所示的阴影部分区域.

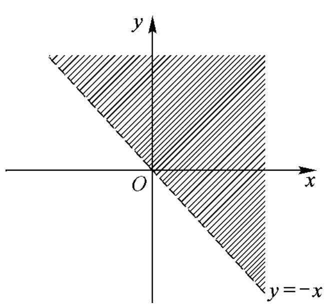


图 2-5-2

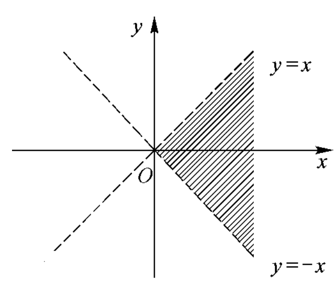


图 2-5-3

例 4　已知函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{2xy}$，求：

(1) $f(1,2)$；

(2) $f(xy,x+y)$.

解　(1) $f(1,2)=\dfrac{1+2}{2\times 1\times 2}=\dfrac{3}{4}$

(2) 分别以 xy 和 $x+y$ 取代原来的 x,y，得

$$f(xy,x+y)=\frac{(xy)+(x+y)}{2(xy)\times(x+y)}=\frac{x+xy+y}{2(x^2y+xy^2)}$$

二、二元函数的极限

在一元函数中，我们曾讨论过当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 对于二元函数 $z=f(x,y)$，同样可以讨论当点 (x,y) 趋向 (x_0,y_0) 时，函数 $z=f(x,y)$ 的变化趋势. 但是，二元函数的情形要比一元函数复杂得多，这是因为，在坐标面 xOy 上，(x,y) 趋向 (x_0,y_0) 的方式可以是多种多样的.

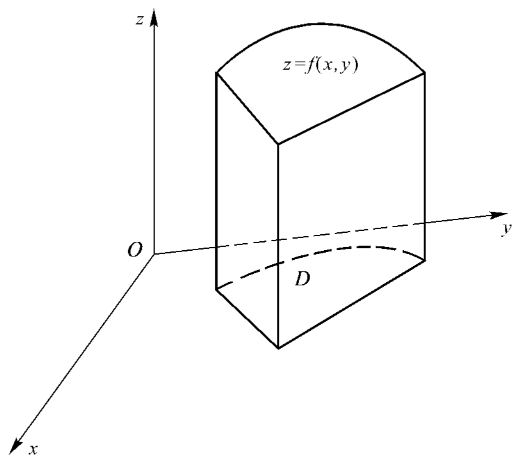


图 2-5-4

定义 2　设二元函数 $z=f(x,y)$，如果当点 (x,y) 以任意方式趋向点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总是趋向于一个确定的常数 A，那么就称 A 是二元函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

二元函数的极限同一元函数的极限一样，也有类似的四则运算法则.

例 5　求极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}$.

解
$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{x\sin(xy)}{xy}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(2,0)}x\cdot\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}=2.$$

例 6　讨论极限 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 的存在性.

解 因为当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=0$ 趋于点 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x\cdot0}{x^2+0^2}=0.$$

而点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

所以,极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

三、二元函数的连续性

与一元函数连续性的概念类似,我们可以给出二元函数连续性的定义.

定义 3 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义,如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ **在点** $P_0(x_0,y_0)$ **处连续**.

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点处都连续,则称函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上连续.

若 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点不连续,则称 P_0 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.显然,在间断点处,$f(x,y)$ 或没有定义,或极限不存在,或者极限值不等于 $f(x_0,y_0)$.

如上面的例子 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处极限不存在,故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续,即点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个**间断点**.

注意 与一元函数类似,二元函数经四则运算和复合运算得到的函数仍为连续函数,一切初等二元函数在其定义域内都是连续的.

例 7 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\dfrac{2x+y}{xy}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{2x+y}{xy}$ 是初等函数,在定义域内是连续函数,其定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\neq0,y\neq0\}$$

于是点 $(2,1)\in D$.从而

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{2x+y}{xy}=f(2,1)=\frac{2\times2+1}{2\times1}=\frac{5}{2}$$

例 8 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{xy+1}+1) = 2$$

需要注意的是，与一元函数一样，对有界闭区域上的连续函数有下面的结论：

(1) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必有最大值和最小值；

(2) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且 C 是介于最大值和最小值之间的实数，则在 D 内至少存在一点 (x_0,y_0)，使得 $f(x_0,y_0)=C$.

第三章　导数与微分

在自然科学的研究和实际应用中，需要研究因变量相对于自变量的变化快慢程度，以及当自变量有微小变化时，相应的函数如何改变等问题. 为了研究这些问题，我们在函数和极限这两个概念的基础上引入导数与微分的概念. 本章主要讨论导数与微分的概念、运算及简单应用.

第一节　导数的概念

一、引例

1. 变速直线运动的瞬时速度

设做变速直线运动的质点在 t 时刻所经过的路程为 s，即路程 s 是时间 t 的函数

$$s = f(t)$$

则当时间由 t_0 改变到 t 时，动点在 $\Delta t = t - t_0$ 这段时间内经过的路程为 $\Delta s = f(t) - f(t_0)$. 动点在 $\Delta t = t - t_0$ 这段时间内的平均速度为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

如果当时间间隔 Δt 很小时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 可以近似地等于动点在时刻 t_0 的速度，且当 Δt 越小，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 就越接近于动点在时刻 t_0 的速度. 但对于动点在时刻 t_0 的速度的精确概念来说，需要用到极限的思想.

于是，当 $t \to t_0$ 时，若极限 $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ 存在，则此极限就是动点在时刻 t_0 的瞬时速度，记作 $v(t_0)$，即

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

例 1　求自由落体在 t_0 时刻的瞬时速度.

解　自由落体运动中路程与时间的关系为

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

于是在$[t_0,t]$内，落体经过的路程为

$$\Delta s=s(t)-s(t_0)=\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2$$

所以落体在t_0时刻的瞬时速度为

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{2}g(t+t_0)=gt_0$$

2. 平面曲线的切线斜率

设有平面曲线C（如图3-1-1所示），点$M(x_0,y_0)$为曲线$y=f(x)$上的一定点，点$N(x,y)$为曲线$y=f(x)$上的一动点，设割线MN的倾斜角（即与x轴的夹角）为φ，则割线MN的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

当$x\to x_0$时，动点N就沿曲线$y=f(x)$趋于定点M，割线MN就随之绕定点M、　而趋于极限位置MT，这时称割线MN的极限位置MT为曲线在定点M处的切线.

于是，当$x\to x_0$时，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\tan\varphi=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则此极限就是切线的斜率，记作k，即

$$k=\tan\alpha=\lim_{x\to x_0}\tan\varphi=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

其中α是切线MT的倾斜角.

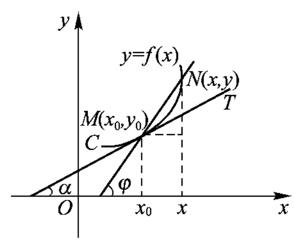


图 3-1-1

例 2　求抛物线$y=x^2$在点$(2,4)$处的切线方程和法线方程.

解　设抛物线$y=x^2$在点$(2,4)$处的斜率为k，则

$$k=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

所以所求切线方程为

$$y-4=4(x-2)\quad 或\quad y=4x-4$$

法线方程为

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2)\quad 或\quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$$

二、导数的定义

上述两个实例,一个是物理问题,一个是几何问题,虽然实际意义不同,但解决问题的数学方法完全相同,都是研究函数的增量与自变量增量比的极限问题,这类极限问题在其他问题里经常会遇到,因此我们把它们抽象概括成导数的定义.

1. 导数的定义

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx($\Delta x\neq 0$,$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内)时,相应地函数有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,如果 Δy 与 Δx 之比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$当 $\Delta x\to 0$ 时,极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,那么这个极限值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数.并且说,函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,记作 $f'(x_0)$,也可记为

$$y'\big|_{x=x_0},\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

如果极限不存在,我们说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

如果固定 x_0,令 $x_0+\Delta x=x$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,有 $x\to x_0$,故函数在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 也可表示为

$$f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

有了导数这个概念,前面两个问题就可以重述为:

(1) 变速直线运动在时刻 t_0 的瞬时速度,就是位置函数 $s=s(t)$ 在 t_0 处对时间 t 的导数,即

$$v(t_0)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0}$$

(2) 平面曲线切线的斜率是曲线纵坐标 y 在该点对横坐标 x 的导数,即

$$k=\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

2. 左、右导数

我们知道,导数是比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$在 $\Delta x\to 0$ 时的极限,那么下面两个极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数,且分别记作 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

根据左右极限的性质,有如下定理:

定理 1　$f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数都存在且相等.

3. 导函数

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都可导,则称 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导.

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都可导,ī　对应于 (a,b) 中的每一个确定的 x 值,对应着一个确定的导数值 $f'(x)$,这样就确定了一个新的函数,此函数称为函数 $y = f(x)$ 的导函数.记作 y'、$f'(x)$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.在不致发生混淆的情况下,导函数也称导数.

显然,函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的函数值,即

$$f'(x_0) = f'(x) \big|_{x = x_0}$$

例 3　求函数 $y = x^2$ 在任意点 x 处的导数.

解　根据导数的定义,我们可按如下步骤求导数:

第一步　求增量 Δy

在点 x 处给自变量一个增量 Δx,相应的函数增量为

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

第二步　算比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

第三步　取极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$$

即
$$y' = (x^2)' = 2x$$

开始用定义求导数时,可按上述三步进行,待掌握后,可略去一些步骤,三步可

以合成一步.

例 4 求函数 $f(x)=C$(C 是常数)的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$,

即
$$(C)'=0.$$
这就是说,常数的导数等于零.

三、导数的几何意义

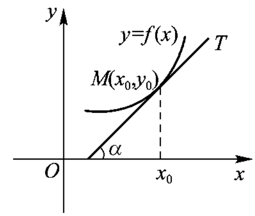


图 3-1-2

由前面的讨论可知,函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率,即 $f'(x_0)=\tan\alpha$,其中 α 是切线的倾斜角(如图 3-1-2 所示).

根据导数的几何意义,可知曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为
$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$
法线方程为
$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\quad f'(x_0)\neq 0$$

例 5 求曲线 $y=\cos x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$处的切线和法线方程.

解 因为$(\cos x)'=-\sin x$,所以
$$(\cos x)'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
故所求切线方程为
$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$
法线方程为
$$y-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

四、可导与连续的关系

定理 2 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,其逆不真.

下面仅对此定理作以说明:设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在,所以
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

这说明函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，但反之不真，$y=f(x)$ 在 x_0 处连续，则该函数在点 x_0 处不一定可导.

例 6　求函数 $y=f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解　很明显，该函数在 $x=0$ 处是连续的. 又

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x<0$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1;$$

当 $\Delta x>0$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1;$$

这说明，当 $\Delta x\to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

五、求导数举例

例 7　求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　
$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]\\&=\cos x\cdot 1=\cos x.\end{aligned}$$

即
$$(\sin x)'=\cos x.$$

用类似的方法可求得

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

例 8　求函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数.

解　根据导数的定义，再利用牛顿二项展开式，可得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C_n^1x^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n}{\Delta x}\\&=nx^{n-1}.\end{aligned}$$

即
$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$
后面我们还将证明，该公式对一般实数也是成立的，即对任意给定的实数 μ，有
$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}.$$

例 9 求函数 $y = x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}$ 的导数.

解 $\dfrac{dy}{dx} = (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{-1})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2}.$

例 10 求对数函数 $y = \log_a x(a > 0, a \neq 0, x > 0)$ 的导数.

解
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$
即
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$
特别地，当 $a = e$ 时，得自然对数的导数
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

第二节　函数的求导法则

前面我们介绍了运用导数的定义求函数导数的方法，但是，如果对每一个函数都使用导数的定义去求导数，那是非常麻烦的，有时甚至是很困难的. 本节我们将介绍一些求导的基本法则，以解决一般初等函数的求导问题.

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 1 设函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都在点 x 具有导数，且有以下法则：

(1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$；

(2) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$；

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}(v(x) \neq 0)$.

上述三个法则的证明思路类似，下面只证法则(2).

证 $[u(x)v(x)]'$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$= u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x)=v(x)$，是由于 $v'(x)$ 存在，由可导必连续可知 $v(x)$ 在点 x 处连续，由连续函数的极限值等于函数值知 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x)=v(x+0)=v(x)$.

对于上述公式，我们有如下推论：

推论 1　$[Cu(x)]'=Cu'(x)$（C 为常数）.

推论 2　$\left[\dfrac{1}{u(x)}\right]'=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$.

推论 3　$[u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$.

例 1　求 $y=\tan x$ 的导数.

解　$y=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

用类似的方法可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

例 2　求 $y=\sec x$ 的导数.

解　$y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$

用类似的方法可得 $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

例 3　求 $y=2x-\sqrt[3]{x}+3\sin x-\cos\dfrac{\pi}{3}$ 的导数.

解　$y'=(2x-\sqrt[3]{x}+3\sin x-\cos\dfrac{\pi}{3})'$

$$=(2x)'-(\sqrt[3]{x})'+(3\sin x)'-(\cos\frac{\pi}{3})'$$

$$=2-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+3\cos x.$$

二、复合函数的求导法则

对于复合函数的求导法则，我们有下面的定理：

定理 2　如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应的点 u 处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 也在点 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad 或 \quad \{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x).$$

证 设变量 x 有增量 Δx，相应的变量 u 有增量 Δu，从而 y 有增量 Δy，由于 u 可导，由可导必连续知 u 是连续函数，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'(u)u'(x)\end{aligned}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

注意，上式推导过程中是假定 $\Delta x\neq 0$ 的，当 $\Delta x=0$ 时，上述结论仍成立.

例 4 求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解 $y'=(\ln\sin x)'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$.

例 5 求函数 $y=\sqrt{x-\mathrm{e}^{-x}}$ 的导数.

解
$$\begin{aligned}y'&=(\sqrt{x-\mathrm{e}^{-x}})'=\frac{1}{2}(x-\mathrm{e}^{-x})^{-\frac{1}{2}}(x-\mathrm{e}^{-x})'\\&=\frac{1}{2}(x-\mathrm{e}^{-x})^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+\mathrm{e}^{-x}).\end{aligned}$$

例 6 设 $y=x^{\mu}$（μ 为实数），求 y'.

解 因为 $y=x^{\mu}=\mathrm{e}^{\mu\ln x}$ 可以看作由指数函数 e^{u} 与对数函数 $u=\mu\ln x$ 复合而成，所以由复合函数求导法则，有

$$y'=(x^{\mu})'=(\mathrm{e}^{\mu\ln x})'=\mathrm{e}^{\mu\ln x}(\mu\ln x)'=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\mu\frac{1}{x}=\mu x^{\mu}\frac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}.$$

即
$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}.$$

三、反函数的求导法则

定理 3 如果单调连续函数 $x=\varphi(y)$ 在点 y 处可导，而且 $\varphi'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的点 x 处可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

就是说，反函数的导数等于直接函数导数的倒数.（证明略）.

例 7 求 $y=a^{x}$ $(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 因为 $y=a^{x}$ 是 $x=\log_a y$ 的反函数，且 $x=\log_a y$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调、可导，又

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y\ln a}\neq 0,$$

所以
$$y'=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=y\ln a=a^x\ln a.$$

即
$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

特别地，有$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

例 8　求 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　因为 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，$x=\sin y$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调、可导，且$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\cos y>0$，

所以
$$y'=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

类似地，有$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

四、基本初等函数的求导公式

对于基本初等函数的求导公式，我们不再一一推证，为了方便使用，特汇总如下.

(1)$(C)'=0$；　(2)$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$；

(3)$(\sin x)'=\cos x$；　(4)$(\cos x)'=-\sin x$；

(5)$(\tan x)=\sec^2 x$；　(6)$(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(7)$(\sec x)'=\sec x\tan x$；　(8)$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(9)$(a^x)'=a^x\ln a$；　(10)$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(11)$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$；　(12)$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

(13)$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(14)$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15)$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$；　(16)$(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

第三节　函数的高阶导数

一般来说,函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数,如果导函数 $f'(x)$ 还可以对 x 求导数,那么称 $f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数,记作

$$y'',f''(x) \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

这时,也称函数 $f(x)$ 二阶可导,按照导数的定义,有

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数,记作

$$y''\big|_{x=x_0},f''(x)\big|_{x=x_0} \quad 或 \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0},\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

类似地,函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 的导数称为函数 $f(x)$ 的三阶导数,记作

$$y''',f'''(x) \quad 或 \quad \frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

一般地,函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数,记作

$$y^{(n)},f^{(n)}(x) \quad 或 \quad \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}},\frac{d^{(n)}f(x)}{dx^{(n)}}$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.相应地,称 $f'(x)$ 为一阶导数.

如果 $y=f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 存在,那么称 $y=f(x)n$ 阶可导.显然,此时 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 都存在.

求高阶导数只需一次一次地去求导,原则上并不需要任何新的方法.

高阶导数也是有许多实际意义的,例如,加速度是速度的变化率,因而它是速度对时间的导数,但速度本身又是路程对时间的导数,所以加速度是路程对时间的二阶导数.

例 1　求函数 $f(x)=2x^5+x^2+6$ 的各阶导数.

解　$f'(x)=10x^4+2x$

$f''(x)=40x^3+2$

$f'''(x)=120x^2$

$f^{(4)}(x)=240x$

$f^{(5)}(x)=240$

$f^{(6)}(x)=0$

当 $n>6$ 时，$f^{(n)}(x)=0$.

例 2　求指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的 n 阶导数.

解　$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

$(\mathrm{e}^x)''=(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

一般地，有 $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$.

例 3　求正弦函数 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

解　$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\times\frac{\pi}{2})$

$y'''=\cos(x+2\times\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\times\frac{\pi}{2})$

一般地，有 $y^{(n)}=\sin(x+n\times\frac{\pi}{2})$，即

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\times\frac{\pi}{2})$$

类似地，可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\times\frac{\pi}{2})$$

例 4　求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的 n 阶导数.

解　$f'(x)=a^x\ln a$

$f''(x)=a^x\ln^2 a$

$f'''(x)=a^x\ln^3 a$

一般地，有 $f^{(n)}(x)=a^x\ln^n a$.

例 5　求函数 $y=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解　$y'=\frac{1}{1+x}$

$y''=-\frac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\frac{1\times 2}{(1+x)^3}=\frac{2!}{(1+x)^3}$

$y^{(4)}=-\frac{1\times 2\times 3}{(1+x)^4}=-\frac{3!}{(1+x)^4}$

一般地，有 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

注意　求 n 阶导数时，通常的方法是先求出一阶、二阶、三阶等导数，从中归纳出 n 阶导数的表达式. 因此，求 n 阶导数的关键在于从各阶导数中寻找规律.

第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数的求导法

到目前为止，我们所讨论的函数都具有形式 $y = f(x)$，其中 $f(x)$ 为 x 的解析式，统称为显函数. 也有许多函数关系没有或不能表示成显函数的形式，但可由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定.

一般地，如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y) = 0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

把一个隐函数化成显函数，称为隐函数的显化. 隐函数的显化有时是困难的，有时甚至是不可能的. 但在实际问题中，往往需要计算隐函数的导数，因此我们希望有一种方法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程计算出它所确定的隐函数的导数，下面通过具体例子来说明这种求导方法.

例 1　求由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解　把方程两边分别对 x 求导，注意将 y 看成是 x 的函数，得

$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} + y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

从上式解得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + e^y}\ (x + e^y \neq 0).$$

例 2　求曲线 $x^3 + y^3 = 3xy$ 在点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 处的切线方程.

解　该曲线称为笛卡儿叶形线. 我们先求曲线在点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 处的切线斜率，方程两边对 x 求导，得

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 3y + 3x \cdot \frac{dy}{dx}$$

从上式解得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

于是

$$k_1 = \frac{dy}{dx}\bigg|_{\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}\bigg|_{\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)} = \frac{4}{5}.$$

因此,所求切线方程为

$$y-\frac{4}{3}=\frac{4}{5}\left(x-\frac{2}{3}\right),$$

即

$$y=\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}.$$

二、由参数方程所确定的函数的求导法

在研究物体运动的轨迹时,常常遇到参数方程. 例如,研究抛射体的运动规律时,如果空气阻力忽略不计,则抛射体的运动轨迹可表示为

$$\begin{cases}x=v_1 t,\\ y=v_2 t-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}\tag{3-4-1}$$

其中,v_1,v_2 分别表示初速度 v_0 在水平和垂直方向上分量,t 是飞行时间,g 是重力加速度,x,y 分别是抛射体在垂直平面内沿 x 轴和 y 轴方向的位移.

从方程(3-4-1)中消去参数 t,得

$$y=\frac{v_2}{v_1}x-\frac{g}{2v_1^2}x^2,$$

这说明方程(3-4-1)确定了 y 是 x 的函数.

一般地,若参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\phi(t),\end{cases} t\in(\alpha,\beta)\tag{3-4-2}$$

确定 y 与 x 间的函数关系,则称此函数关系所表达的函数为由参数方程(3-4-2)所确定的函数.

在实际问题中,往往需要计算出由参数方程(3-4-2)所确定的函数的导数,但是,要从方程(3-4-2)中消去 t 有时是很困难的,在这种情况下如何求导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$呢?下面我们来介绍参数方程的求导法.

当 $t\in(\alpha,\beta)$ 时,假定 $x=\varphi(t)$,$y=\phi(t)$ 均可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$,$t=\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数. 于是方程(3-4-2)所确定的 $y=y(x)$ 可看成是由 $y=\phi(t)$ 和 $t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的复合函数,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},$$

再由反函数的求导法则,得

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}},$$

所以,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{3-4-3}$$

例 3 求双曲线$\begin{cases}x=\sec t\\ y=\tan t\end{cases}$在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

解 由公式(3-4-3),得

$$k_1=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2},$$

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时,$x=\sqrt{2}$,$y=1$,故所求切线方程为

$$y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}),\text{即 } y=\sqrt{2}x-1.$$

例 4 设一质点的运动轨迹由参数方程$\begin{cases}x=t-2\sin t\\ y=1-2\cos t\end{cases}$给出,求该质点在时刻 $t=\frac{\pi}{4}$ 的速度大小.

解 因为质点的速度在水平方向的分量为

$$v_1=\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=(1-2\cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,$$

在垂直方向的分量为

$$v_2=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=(2\sin t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=2,$$

所以,质点在 $t=\frac{\pi}{2}$ 时的速度大小为

$$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}.$$

三、对数求导法

根据隐函数求导法,我们还可以得到一个简化求导运算的方法.它适合于由几个因子通过乘、除、乘方、开方所构成的比较复杂的函数(包括幂指数函数)的求导.这个方法是先取对数,化乘、除为加、减,化乘方、开方为乘积,然后利用隐函数求导法求导,因此称为对数求导法.下面举例说明这种方法.

例 5 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解　对上式两边取自然对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)],$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),$$

所以有

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

例 6　求 $y = x^{\sin x}(x>0)$ 的导数.

解　对上式两边取自然对数，得

$$\ln y = \sin x\ln x$$

两边求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x$$

所以，有

$$\begin{aligned} y' &= y\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right) \\ &= x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right). \end{aligned}$$

第五节　偏　导　数

一、偏导数

在研究二元函数时，有时需要求当其中一个自变量不变，函数关于另一个自变量的变化率，这种形式的变化率就是二元函数的偏导数.

1. 偏导数的定义

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有改变量 Δx 时，相应的函数有改变量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或 } f_x(x_0,y_0).$$

类似地，当 x 固定在 x_0，而 y 在 y_0 处有改变量 Δy 时，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或 } f_y(x_0,y_0).$$

二元函数偏导数的定义可以类推到三元及三元以上的函数.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点(x,y)处对 x(或对 y)的偏导数都存在，那么就确定了函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内对 x(或对 y)的两个偏导函数，分别记作 $\frac{\partial z}{\partial x},z'_x,f_x(x,y)$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z'_y,f_y(x,y)$.

偏导数函数也简称为偏导数.

2. 偏导数的求法

由偏导数的定义可知，求二元函数(或多元函数)对一自变量的偏导数时，只需将其他自变量看成常数，用一元函数的求导方法即可求得.

例 1 求 $z=x^2\sin y$ 的偏导数.

解 把 y 看作常量对 x 求导数，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y$；

把 x 看作常量对 y 求导数，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y$.

例 2 求 $f(x,y)=x^2+xy^2$ 在$(1,2)$的偏导数.

解 因为 $f_x(x,y)=(x^2+xy^2)'_x=2x+y^2$；

$f_y(x,y)=(x^2+xy^2)'_y=2xy$，

所以，$f_x(1,2)=2\times 1+2^2=6$；

$f_y(1,2)=2\times 1\times 2=4$.

例 3 设 $f(x,y)=e^{\arctan\frac{y}{x}}\ln(x^2+y^2)$，求 $f_x(1,0)$.

解 如果先求偏导数 $f_x(x,y)$，运算是比较复杂的，我们可先把函数中的 y 固定在 $y=0$，则有 $f(x,0)=2\ln x$，从而 $f_x(x,0)=\frac{2}{x}$，所以 $f_x(1,0)=2$.

二、高阶偏导数

从偏导数的概念中可以看出，二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

仍是关于自变量 x,y 的二元函数，如果这两个二元函数各自关于自变量 x,y 的偏导数也存在，则称它们是 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，这样的偏导数共有 4 个，分别表示为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

其中，第二和第三个偏导数称为混合偏导数，它们求偏导的先后顺序不同. f_{xy} 是先对 x 求偏导后对 y 求偏导，f_{yx} 是先对 y 求偏导再对 x 求偏导.

同理，可以定义三阶、四阶偏导数等，二阶及以上的偏导数称为高阶偏导数.

例 4　求函数 $z=x^3+2x^2y-y^3$ 的二阶偏导数.

解　函数的一阶偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+4xy,\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2-3y^2$$

再分别关于 x,y 求偏导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+4xy)=6x+4y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+4xy)=4x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2x^2-3y^2)=4x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2x^2-3y^2)=-6y$$

注意　在此例中，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，这并不是偶然现象. 事实上，有下面结论：如果 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

例 5　已知 $z=\mathrm{e}^{xy}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

解 $z=e^{xy}$ 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy})=ye^{xy}\cdot y=y^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})=e^{xy}+ye^{xy}\cdot x=(xy+1)e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})=e^{xy}+xe^{xy}\cdot y=(xy+1)e^{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy})=xe^{xy}\cdot x=x^2e^{xy}$$

因此

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(x^2e^{xy})=x^2e^{xy}\cdot x=x^3e^{xy}$$

例 6 验证函数 $z=2\cos^2(x-\frac{y}{2})$ 满足

$$\frac{2\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

证 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4\cos(x-\frac{y}{2})\cdot[-\sin(x-\frac{y}{2})]$$

$$=-4\sin(x-\frac{y}{2})\cos(x-\frac{y}{2})=-2\sin(2x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4\cos(x-\frac{y}{2})\cdot[-\sin(x-\frac{y}{2})\cdot(-\frac{1}{2})]$$

$$=2\sin(x-\frac{y}{2})\cos(x-\frac{y}{2})=\sin(2x-y)$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}[\sin(2x-y)]=\cos(2x-y)\cdot(-1)=-\cos(2x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[-2\sin(2x-y)]=-2\cos(2x-y)\cdot(-1)=2\cos(2x-y)$$

因此

$$\frac{2\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2[-\cos(2x-y)]+2\cos(2x-y)=0$$

第六节　函数的微分及应用

在前面的导数概念讨论中,主要研究了增量之比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$,而对于函数增量本身却没有作进一步探讨.一般来说,计算函数$y=f(x)$的增量Δy的精确值是比较困难的.所以,往往需要计算它的近似值,找出简便的计算方法.这就是函数微分的问题.本节主要介绍函数微分的概念、计算及简单应用.

一、微分的概念

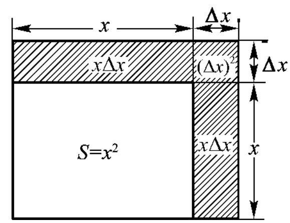


图 3-6-1

引例:现有一个正方形,其边长为x,如果将正方形的边长由x变到$x+\Delta x$(如图 3-6-1 所示),那么正方形的面积改变了多少?

易知,正方形的面积S是边长x的函数,即$S=x^2$.

当边长有增量Δx时,面积S相应的增量为

$$\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$$

当Δx很小时,如当$x=2,\Delta x=0.01$时,$2x\Delta x=0.04$,而$(\Delta x)^2=0.000\ 1$.显然,当Δx越小,$(\Delta x)^2$就比$2x\Delta x$小得越多.$(\Delta x)^2$的值相对于$2x\Delta x$的值来说,可以忽略不计.因此,如果要取ΔS的近似值,$2x\Delta x$就是ΔS的一个很好的近似值,$2x\Delta x$就是$S=x^2$的微分.下面给出微分的定义.

定义　设函数$y=f(x)$在某区间内有定义,当x的增量为Δx,相应地,函数的增量为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中,A是不依赖于Δx的常量,而$o(\Delta x)$是比Δx高阶的无穷小,那么称函数$y=f(x)$在点x处**可微**,$A\Delta x$称为函数$y=f(x)$在点x处的**微分**,记作$\mathrm{d}y$或$\mathrm{d}f(x)$,即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x$$

由于$A\Delta x$是Δx的线性函数,当$\Delta x\to 0$时,$\Delta y\approx A\Delta x$,称$A\Delta x$为$\Delta y$的线性主部,也就是说,$\mathrm{d}y$是$\Delta y$的主要部分.

一般地,如果函数$y=f(x)$在点x处的导数存在,即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

由极限与无穷小的关系知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$$

即

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$$

其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=0$，即 $\alpha\Delta x$ 是比 Δx 高阶的无穷小，从而可写成

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

由此可知，微分定义中的线性主部 $A\Delta x$ 就是 $f'(x)\Delta x$. 函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分就可以写成

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x$$

对于自变量 x 的微分，可以认为是对 $y=x$ 的微分，因此有 $\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x$，即自变量的微分等于自变量的增量. 于是函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分就可以写成

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$$

由此可知，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$ 即函数的导数，等于函数的微分与自变量的微分之商. 因此，导数又称为微商.

由于 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$ 是等价的，即函数 $y=f(x)$ 在 x 处可微与可导是等价的. 因此，求一个函数的微分问题可以归结为求该函数的导数问题.

有了微分的概念以后，函数的增量 Δy 就可以用它的微分近似地表示，所产生的误差是 Δx 的高阶无穷小，这样就可以把计算较烦琐的 Δy 转化为计算微分 $\mathrm{d}y$.

例 1 求函数 $y=1+3x^2$ 在 $x=1,\Delta x=0.01$ 时的增量及微分.

解 $\Delta y=3(x+\Delta x)^2-3x^2=3\times 1.01^2-3=0.060\,3$

$\mathrm{d}y=y'\big|_{x=1}\Delta x=6\times 0.01=0.06$

例 2 求函数 $y=a^x$ 的微分.

解 $\mathrm{d}y=(a^x)'\mathrm{d}x=a^x\ln a\,\mathrm{d}x$

二、微分的几何意义

如图 3-6-2 所示，函数 $y=f(x)$ 是一条曲线，过曲线上一点 $M(x_0,y_0)$ 作切线 MT，设 MT 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=f'(x)$.

当自变量 x 有微小增量 Δx 时，就得到曲线上另一点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，从图中可以看出，$MQ=\Delta x$，$QN=\Delta y$，则 $QP=MQ\cdot\tan\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0)$，即 $\mathrm{d}y=QP$.

因此，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分的几何意义，就是曲线 $y=f(x)$ 在点

$M(x_0,y_0)$ 处的切线 MT 的纵坐标对应于 dx 的增量 QP.

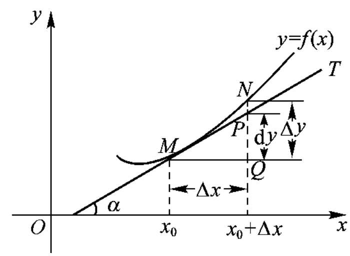


图 3-6-2

三、微分基本公式与运算法则

按照微分的定义，求函数的微分，只要求出它的导数 $f'(x)$，再乘以自变量的微分 dx 即可. 所以，由导数的基本公式与运算法则，可得到如下的微分基本公式与运算法则.

1. 微分基本公式

(1) $d(C)=0$（C 为常数）；　(2) $d(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx$（$\alpha$ 为任意实数）；

(3) $d(a^x)=a^x\ln a dx$；　(4) $d(e^x)=e^x dx$；

(5) $d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$；　(6) $d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$；

(7) $d(\sin x)=\cos x dx$；　(8) $d(\cos x)=-\sin x dx$；

(9) $d(\tan x)=\sec^2 x dx$；　(10) $d(\sec x)=\sec x\tan x dx$；

(11) $d(\cot x)=-\csc^2 x dx$；　(12) $d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$；

(13) $d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　(14) $d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(15) $d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$；　(16) $d(\text{arccot } x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

2. 微分运算法则

(1) $d[u(x)\pm v(x)]=du(x)\pm dv(x)$；

(2) $d[u(x)v(x)]=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$；

(3) $d[Cu(x)]=Cdu(x)$（C 为常数）；

(4) $d\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$（$v(x)\neq 0$）；

(5) $d[f(g(x))]=f'(g(x))g'(x)dx$.

这里，公式(5)是**复合函数的微分法则**.

因为 $du=g'(x)dx$，所以复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$dy=f'(u)du$$

由此可见，无论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $dy=f'(u)du$ 保持不变. 这一性质称为**微分形式的不变性**. 有时，利用一阶微分形式的不变性求复合函数的微分比较方便.

例 3　设 $y=\cos(2x+3)$，求 dy.

解 $dy = d\cos(2x+3) = -\sin(2x+3)d(2x+3) = -2\sin(2x+3)dx$

例 4 设 $y=\ln(1+e^x)$，求 dy.

解 $dy = d[\ln(1+e^x)] = \dfrac{1}{1+e^x}d(1+e^x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$

四、微分在近似计算中的应用

在实际问题中，我们经常利用微分来作近似计算.

当函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，有如下近似公式：

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \tag{3-6-1}$$

或

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{3-6-2}$$

上式中令 $x_0+\Delta x = x$，则

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \tag{3-6-3}$$

特别地，当 x_0，$|x|$ 很小时，有

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \tag{3-6-4}$$

这里，式(3-6-1)可以用于求函数增量的近似值，而式(3-6-2)、(3-6-3)、(3-6-4)可用来求函数的近似值.

应用式(3-6-4)可以用来推得一些常用的近似公式. 当 $|x|$ 很小时，有

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\dfrac{1}{n}x$；　(2) $e^x \approx 1+x$；

(3) $\ln(1+x) \approx x$；　(4) $\sin x \approx x$（x 用弧度制作单位）；

(5) $\tan x \approx x$（x 用弧度制作单位）.

证 现只证(1)，其余几个公式可用类似的方法证明.

取 $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$，于是 $f(0)=1$，

$$f'(0) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0} = \frac{1}{n}$$

代入式(3-6-4)，得

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$$

例 5 计算 arctan 1.05 的近似值.

解 令 $f(x)=\arctan x$，由式(3-6-2)有

$$\arctan(x_0+\Delta x) \approx \arctan x_0 + \frac{1}{1+x_0^2}\Delta x,$$

取 $x_0=1$，$\Delta x = 0.05$，有

$$\arctan 1.05 = \arctan(1+0.05) \approx \arctan 1 + \frac{1}{1+1^2}\times 0.05$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{0.05}{2} \approx 0.810.$$

例 6　计算 $\sqrt[3]{65}$ 的近似值.

解　因为

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} = \sqrt[3]{64\left(1+\frac{1}{64}\right)} = 4\sqrt[3]{1+\frac{1}{64}},$$

由近似公式(1),得

$$\sqrt[3]{65} = 4\sqrt[3]{1+\frac{1}{64}} \approx 4\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{64}\right) = 4+\frac{1}{48} \approx 4.021.$$

例 7　某球体的体积从 $972\pi\ \text{cm}^3$ 增加到 $973\pi\ \text{cm}^3$,试求其半径的改变量的近似值.

解　设球的半径为 r,体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,则 $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

$$\Delta r \approx \mathrm{d}r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{V^2}}\mathrm{d}V = \sqrt[3]{\frac{1}{36\pi}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{V^2}}\mathrm{d}V$$

现知

$$V = 972\pi\ \text{cm}^3, \Delta V = 973\pi - 972\pi = \pi\ \text{cm}^3,$$

所以

$$\Delta r \approx \mathrm{d}r = \sqrt[3]{\frac{1}{36\pi(972\pi)^2}}\pi = \sqrt[3]{\frac{1}{36\times 972^2}} \approx 0.003\ \text{cm}.$$

即半径约增加 0.003 cm.

第四章　微分中值定理及导数的应用

本章在掌握了导数概念及其计算方法的基础上，来研究函数以及曲线的某些性态，并利用这些知识解决一些相关的实际问题. 它们的理论基础是微分中值定理，作为微分中值定理的直接应用，本章还将介绍求未定式的一个常用方法 —— **洛必达法则**.

第一节　微分中值定理

一、罗尔中值定理

定理 1　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) 在区间两端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$.

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证　因为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以根据闭区间上连续函数的性质可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取得最大值 M 和最小值 m. 下面分两种情形来讨论.

其一，若 $m=M$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必为常数，从而有 $f'(x)\equiv 0$，因此在 (a,b) 内任取一点作为 ξ，均有 $f'(\xi)=0$.

其二，若 $m\neq M$，则两数 m,M 中至少有一个不等于在端点的函数值 $f(a)$ 或 $f(b)$. 设 $M\neq f(a)$，并设 $\xi\in(a,b)$，且能使 $f(\xi)=M$. 下面证明 $f'(\xi)=0$.

由于 $f(x)$ 在 ξ 处最大，故不论 Δx 为正或为负，总有

$$f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\leqslant 0$$

当 $\Delta x>0$ 时，

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0$$

又由于假定 $f'(\xi)$ 存在，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}$ 存在，所以有

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

同理，当 $\Delta x < 0$ 时，可以推得

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leqslant 0.$$

因此，必然有 $f'(\xi) = 0$. 这就证明了此定理.

罗尔中值定理的几何意义是：若连续曲线 $y = f(x)$ 的弧 AB 上处处具有不垂直于 x 轴的切线且两端点的纵坐标相等，则在这弧上至少能找到一点，使曲线在该点处的切线平行于 x 轴(如图 4-1-1 所示).

在此需要说明的是，罗尔中值定理中的三个条件对于 $f'(\xi) = 0(\xi \in (a,b))$，只是充分的，而非必要的，另外，若定理中的三个条件不同时满足，这样的 ξ 有可能不存在.

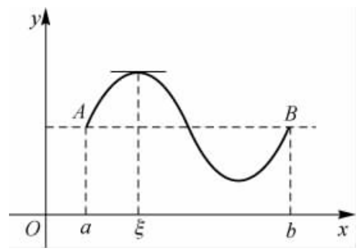


图 4-1-1

例 1　设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$，不求导数判断 $f'(x) = 0$ 实根的个数，并指出所在范围.

解　因为 $f(1) = f(2) = f(3) = 0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$，$[2,3]$ 上满足罗尔中值定理条件，因此有 $f'(x) = 0$，于是在 $(1,2)$ 内至少有一个实根，在 $(2,3)$ 内至少有一个实根，又因 $f'(x)$ 为二次多项式，故 $f'(x) = 0$ 只能有两个实根，分别在区间 $(1,2)$ 及 $(2,3)$ 内.

二、拉格朗日中值定理

定理 2　设函数 $y = f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 可导.

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

在证明该定理之前，我们先看其几何意义. 由条件(1)、(2) 可知，$y = f(x)$ 在平面上是以 $A(a, f(a))$，$B(b, f(b))$ 为端点的连续光滑曲线弧 AB(如图 4-1-2 所示)，显然 $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 是连接点 $A(a, f(a))$，$B(b, f(b))$ 的弦 AB 的斜率，定理的结论是说在弧 AB 上至少存在一点 C，使曲线 $y = f(x)$ 在 C 点处的切线平行于弦 AB.

证　在几何意义的启发下，作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right],$$

容易验证 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,且 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,故 $\varphi(x)$ 在(a,b)上满足罗尔中值定理条件,从而在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $\varphi'(\xi)=0$,即

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

于是定理得证.

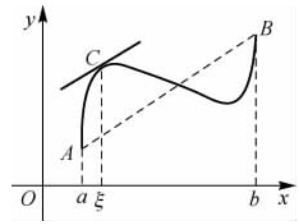


图 4-1-2

注意:

(1) 罗尔中值定理是拉格朗日中值定理当 $f(a)=f(b)$ 时的特殊情形;

(2) 拉格朗日中值定理建立了函数在一个区间上的改变量和函数在这个区间内某点处的导数之间的关系.

推论 1 若在开区间(a,b)内恒有 $f'(x)=0$,则在(a,b)内 $f(x)$ 恒为常数.

推论 2 若在开区间(a,b)内恒有 $f'(x)=g'(x)$,则在(a,b)内恒有 $f(x)=g(x)+C$(C 为常数).

例 2 对于函数 $f(x)=\ln x$ 在$[1,\mathrm{e}]$上验证拉格朗日中值定理的正确性.

解 $f(x)=\ln x$ 为初等函数,在$[1,\mathrm{e}]$上连续,在$(1,\mathrm{e})$内可导,即 $f(x)$ 在$[1,\mathrm{e}]$上满足拉格朗日中值定理的条件,于是应有

$$\frac{\ln \mathrm{e}-\ln 1}{\mathrm{e}-1}=\frac{1}{\xi}.$$

即 $\xi=\mathrm{e}-1\in(1,\mathrm{e})$,因此有开区间$(1,\mathrm{e})$内的点 ξ,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\mathrm{e})-f(1)}{\mathrm{e}-1}$ 成立.

例 3 证明不等式:

$$|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|.$$

证 设 $f(t)=\arctan t$. 若 $a\neq b$,应用拉格朗日中值定理,得

$$\arctan a-\arctan b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b)\quad \xi\in(a,b),$$

两边取绝对值,得

$$|\arctan a-\arctan b|=\frac{1}{1+\xi^2}|a-b|\leqslant|a-b|.$$

上式当 $a=b$ 时也成立.

故
$$|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|.$$

三、柯西中值定理

定理 3 设 $f(x),g(x)$ 满足条件:

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)可导；

(3) 在(a,b)内任何一点处$g'(x)\neq 0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明(略). 现仅作几何解释如下：

若将定理 3 中的x看成参数，则可将

$$x=f(x),g=g(x)\quad a\leqslant x\leqslant b$$

看作一条曲线的参数方程表示式，这时$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$表示连接曲线两端点$A(g(a),f(a))$，$B(g(b),f(b))$的弦的斜率，而$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$表示该曲线上某一点$C(g(\xi),f(\xi))$处切线的斜率. 因此，柯西中值定理的几何意义就表示：在连续且除端点外处处有不垂直于x轴的切线的曲线弧AB上，至少存在一点C，在该点处的切线平行于曲线两端点的连线.

第二节　洛必达法则

在求函数极限时，如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时，两个函数$f(x)$与$F(x)$都趋于零或都趋于无穷大，ī　极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}$(或$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)}$)可能存在，也可能不存在. 这种极限称为未定式，并分别简记为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型. 例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x}=0$，这三个极限均为$\dfrac{0}{0}$型. 从$\dfrac{0}{0}$这个形态上说是未定的，但因分子分母趋于 0 的快慢不同而有不同的极限值. 我们可以通过消去分子分母的“零因子”(即极限为零的因子)或“无穷大因子”(即极限为无穷大的因子)来求解，但这类问题都相对比较简单，为了解决更为复杂的未定式，本节引入一个简便的求$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限的重要方法 —— **洛必达法则**.

一、$\dfrac{0}{0}$型未定式

定理 1　设函数$f(x)$和$F(x)$都在点x_0的某个去心邻域内可导，且$F'(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=0$. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$(或$\infty$)，ī

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)} = A \quad (\text{或} \infty)$$

当 $x \to \infty$ 时,若满足相应的条件,该定理结论仍然成立.

例 1　求$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

解　$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6x}{6x - 2} = \dfrac{3}{2}$

例 2　求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \sin x^2}{x^6}$.

解　这是$\dfrac{0}{0}$型未定式,两次使用洛必达法则,得

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin x^2}{x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2x\cos x^2}{6x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{3x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{2x\sin x^2}{12x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{6x^2} = \frac{1}{6}$$

此例题说明洛必达法则可重复使用,但是要注意的是在重复使用洛必达法则的过程中,需要验证所求极限是不是$\dfrac{0}{0}$型的未定式,如果不是,就不能继续应用洛必达法则,否则会导致错误的结果.

例 3　求$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \arctan x}{\sin \dfrac{1}{x}}$.

解　此极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式,得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\pi}{2} - \arctan x}{\sin \dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\dfrac{1}{1 + x^2}}{-\dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{\cos \dfrac{1}{x}} \right) = 1$$

洛必达法则的条件是充分非必要的,因此,在计算极限过程中,当使用洛必达法则失效时,不表示极限不存在,此时可以改用其他方法来求.

例 4　求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

解　此极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式,但因为

$$\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)' = 2x\sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

其中$\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在，从而$\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在，由此知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$不存在，所以不能使用洛必达法则进行计算. 但可以寻找其他方法，此题可以用重要极限的结论，以及无穷小的性质来计算.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\right]=1\times 0=0$$

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

定理 2　设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 都在点 x_0 的某个去心邻域内可导，且 $F'(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=\infty$. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$（或 ∞），ī

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A\quad（或\ \infty）$$

当 $x\to\infty$ 时，若满足相应的条件，该定理结论仍然成立.

例 5　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$.

解　此极限为$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3}=0$$

在计算极限时要注意方法的选择，并非所有$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式都适用洛必达法则.

例 6　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

解　此极限为$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式. 利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

利用两次洛必达法则后，又还原为原来的极限，所以该题不能使用洛必达法则

进行计算.这就需要寻求其他方法进行计算.实际上,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

三、其他类型未定式

除了$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型外,还有其他一些类型的未定式,如$0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,0^0,1^∞,∞^0等,它们可以先化成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型,然后利用$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的洛必达法则计算它们的极限.

例 7 求$\lim\limits_{x\to0^+}x^3\ln x$.

解 这是$0\cdot\infty$型未定式,可把其中一个函数化成它的倒数形式,使其变成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型,即可利用洛必达法则计算它们的极限.

$$\lim_{x\to0^+}x^3\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-3\frac{1}{x^4}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{3}=0$$

例 8 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解 这是$\infty-\infty$型未定式,通过通分可将其化为$\frac{0}{0}$型未定式.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)&=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x\frac{1}{x}+\ln x-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-\frac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

解 这是0^0型未定式,由$x^x=e^{x\ln x}$知,当$x\to0^+$时,其指数$x\ln x$为$0\cdot\infty$型未定式.因为

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

所以
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1$$

第三节　函数的单调性、极值与最值

一、函数单调性判别法

一个函数在某个区间内单调增减性的变化规律，是研究函数图象时首先要Ж的问题，以前已经给出了函数单调性的定义，现在介绍利用函数的导数判定函数单调性的方法.

定理 1　设函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则

(1) 在 (a,b) 内，若 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加；

(2) 在 (a,b) 内，若 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少.

证　因为 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，故在 $[a,b]$ 上任意两点 x_1，x_2（不妨设 $x_1 < x_2$），必有 $\xi \in (x_1, x_2)$，使
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

(1) 若对任意 $x \in (a,b)$，有 $f'(x) > 0$，则
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$
即 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加.

(2) 若对任意 $x \in (a,b)$ 有 $f'(x) < 0$，则
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) < 0,$$
即 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少.

这个定理说明了可以利用导数的符号来判定函数的增减性，$f'(x)$ 取正、负的分界点，必满足方程 $f'(x) = 0$ 或 $f'(x)$ 不存在，满足 $f'(x) = 0$ 的点 x 称为 $f(x)$ 的**驻点**（或稳定点）.

讨论函数 $f(x)$ 的严格单调性可按下列步骤进行：

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 令 $f'(x) = 0$，求出 $f(x)$ 的驻点和 $f'(x)$ 不存在的点；

(3) 用上述各点将定义域分成若干个开区间；

(4) 判别 $f'(x)$ 在每个开区间内的符号，即可确定 $f(x)$ 在各区间上的单调性.

例 1　讨论函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 的严格单调性.

解　$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$
令 $f'(x) = 0$，解得驻点为 $x_1 = -1$，$x_2 = 1$. x_1，x_2 将定义域分为三个区间：

$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$.

在$(-\infty,-1)$内，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在区间$(-\infty,-1]$内严格单调增加；

在$(-1,1)$内，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在区间$[1,+\infty]$内严格单调减少；

在$(1,+\infty)$内，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在区间$[1,+\infty]$内严格单调增加；

故函数$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$，$[1,+\infty)$上严格单调增加，在区间$[-1,1]$上严格单调减少.

例 2 判定函数$f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$的单调区间.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2(x-1)}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

令$f'(x)=0$，解得驻点为$x_1=\dfrac{2}{5}$，又当$x_2=0$时，$f'(x)$不存在. 于是x_2，x_1将定义域分为三个区间$(-\infty,0)\left(0,\dfrac{2}{5}\right),\left(\dfrac{2}{5},+\infty\right)$.

在$(-\infty,0)$内，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上严格单调增加；

在$\left(0,\dfrac{2}{5}\right)$内，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{2}{5}\right]$上严格单调减少；

在$\left(\dfrac{2}{5},+\infty\right)$内，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在区间$\left[\dfrac{2}{5},+\infty\right)$上严格单调增加；

故$(-\infty,0]$，$\left[\dfrac{2}{5},+\infty\right)$为$f(x)$的严格单调增加区间；$\left[\dfrac{2}{5},+\infty\right]$为$f(x)$的严格单调减少区间.

例 3 证明：当$x\neq 0$时，有$e^x>1+x$.

证 令$f(x)=e^x-1-x$，则$f'(x)=e^x-1$，令$f'(x)=0$，求得驻点为$x=0$.

当$x>0$时，$e^x>1$，$f'(x)>0$，$f(x)$严格单调增加，且$f(x)$在$x=0$点处连续，从而$f(x)>f(0)$，即$e^x-1-x>0$，$e^x>1+x$；

当$x<0$时，$e^x<1$，$f'(x)<0$，$f(x)$严格单调减少，从而$f(x)>f(0)$，$e^x-1-x>0$，$e^x>1+x$；

总之，当$x\neq 0$时，总有$e^x>1+x$.

二、函数的极值及其求法

定义 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，且对此邻域内任一点$x(x\neq x_0)$均有$f(x)<f(x_0)$，则称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个**极大值**；同样，如对此邻域内任一点$x(x\neq x_0)$均有$f(x)>f(x_0)$，则称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个**极小值**. 函数的极大值和极小值统称为函数的**极值**. 使函数取得极值的点x_0，称为**极值点**.

图 4-3-1 中，x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 都是极值点，其中 x_2, x_4 为极大值点，其余三个点是极小值点.

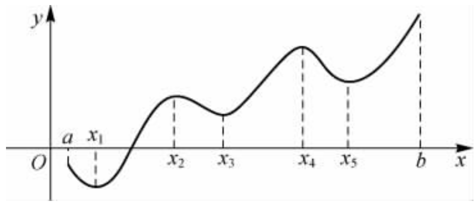


图 4-3-1

应当注意的是，函数极值的概念是局部性的，函数在点 x_0 处取得极大值(或极小值)，仅指在局部范围内，极值可能有若干个，有时极小值可能大于极大值，如图 4-3-1 中就有 $f(x_5) > f(x_2)$.

定理 2(极值的必要条件)　设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，且在点 x_0 处取得极值，ī　　$f'(x_0) = 0$.

证　只证 $f(x_0)$ 是极大值的情形. 因为 $f'(x_0)$ 为 $f(x_0)$ 在点 x_0 处的导数，所以有

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

因为 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值，所以对于 x_0 的某邻域内的一切 x，只要 $x \neq x_0$，恒有 $f(x) < f(x_0)$，因此，当 $x > x_0$ 时，有 $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$，于是有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$，同理，当 $x < x_0$ 时，有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$，从而得 $f'(x_0) = 0$.

类似地可证明 $f(x_0)$ 为极小值的情形.

定理 3(极值的第一判别法)　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内可导，ī　　:

(1) 如果当 $x < x_0$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x > x_0$ 时，$f'(x) < 0$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2) 如果当 $x < x_0$ 时，$f'(x) < 0$；当 $x > x_0$ 时，$f'(x) > 0$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

(3) 如果在 x_0 的两侧，函数的导数具有相同的符号，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

证明(略)

定理 4(极值的第二判别法)　设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) \neq 0$，ī　　:

(1) 如果 $f''(x_0)<0$,则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值;

(2) 如果 $f''(x_0)>0$,则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

证 (1) 由于 $f''(x_0)<0$,所以

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$$

因此,在 x_0 的某邻域内,有

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0(x\neq x_0)$$

又因 $f'(x_0)=0$,所以有

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0(x\neq x_0)$$

从而可知,当 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,于是由定理 3 知,$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

类似地可证明(2).

例 4 求函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 的极值.

解法 1(运用定理 3)

因为该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$,令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=1$,$x_2=3$,用这两点把定义域分成三个小区间$(-\infty,1)$,$(1,3)$,$(3,+\infty)$.

在$(-\infty,1)$内,$f'(x)>0$;在$(1,3)$内,$f'(x)<0$.故由定理 3 知,$f(1)=4$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

同理,$f(3)=0$ 为 $f(x)$ 的极小值.

解法 2(运用定理 4) 因为该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f''(x)=6x-12$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=1$,$x_2=3$.

又因为 $f''(1)=-6<0$,所以 $f(1)=4$ 为已知函数的极大值.

$f''(3)=6>0$,所以 $f(3)=0$ 为其极小值.

例 5 求函数 $f(x)=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 因为此函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$f'(x)=-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{-2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}\quad(x\neq 1)$$

$x=1$ 时,$f'(x)$ 不存在,所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可能极值点.该点将定义域分为两个小区间$(-\infty,1)$,$(1,+\infty)$.

在 $(-\infty,1)$ 内 $f'(x)>0$，在 $(1,+\infty)$ 内 $f'(x)<0$，故由定理 3 知，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=2$.

三、函数的最大值和最小值

我们知道，若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在该区间上一定有最大值和最小值. 很显然，如果它的最大值和最小值在开区间 (a,b) 内取得，ī　对可微函数来说，最大值和最小值点必在 $f(x)$ 的驻点之中. 但是，有时函数的最大值和最小值可能在区间的端点处取得，因此在求函数的最大值和最小值时，应当求出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全部驻点处的值及端点处的函数值，如果有不可微的点，该点的函数值也要计算出来. 将这些值加以比较，其中最大者即为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，最小者即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

例 6　求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值和最小值.

解　因为该函数在已知区间上连续，所以在此区间上存在最大值和最小值.

又因为 $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-2$，$x_2=1$.

由于 $f(-2)=20$，$f(1)=-7$，$f(-3)=9$，$f(4)=128$，比较各值得，函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(4)=128$，最小值为 $f(1)=-7$.

对于实际问题，往往根据问题的性质就可断定函数 $f(x)$ 在定义区间内部有最大值或最小值. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 内仅有一个极值，是极大值或极小值，则它就是函数 $f(x)$ 在该区间内的最大值或最小值.

例 7　有一边长为 a 的正方形铁片，在每个角上剪去同样大小的正方形，用余下的铁片做成一个开口盒子，问剪去的正方形边长为多少时，所做盒子的容积最大？

解　设剪去的小正方形边长为 x，则所做开口盒子的容积是

$$V(x)=(a-2x)^2x,\ 0<x<\frac{a}{2}.$$

此问题可转化为求函数 $V(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ 上的最大值问题.

$$\begin{aligned}V'(x)&=2(a-2x)(-2)x+(a-2x)^2\\&=(a-2x)(a-6x),\end{aligned}$$

令 $V'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{2}$（舍去），$x=\frac{a}{6}$，

因为

$$V(0)=V\left(\frac{a}{2}\right)=0,\ V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2}{27}a^3,$$

所以，剪去的正方形边长 $x=\frac{a}{6}$ 时，所做盒子容积最大，最大值为$\frac{2}{27}a^3$.

第四节　多元函数的极值和最值

前面我们曾用导数求一元函数的极值，类似地，我们也可以用偏导数来求多元函数的极值，本节着重讨论二元函数的情形.

一、二元函数的极值

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，如果对于此邻域内任何异于 $P_0(x_0,y_0)$ 的点 (x,y)，都有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ 成立，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极大值（或极小值）$f(x_0,y_0)$. 极大值和极小值统称为极值，使函数取得极值的点 (x_0,y_0) 称为极值点.

定理 1（极值存在的必要条件）　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极值，且函数在该点的一阶偏导数存在，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0.$$

证　因为点 (x_0,y_0) 是函数 $f(x,y)$ 的极值点，若固定 $f(x,y)$ 中的变量 $y=y_0$，则 $z=f(x,y_0)$ 是一个一元函数，且在 $x=x_0$ 处取得极值. 由一元函数极值的必要条件知 $f_x(x_0,y_0)=0$，同理可证 $f_y(x_0,y_0)=0$.

使 $f_x(x,y)=0,f_y(x,y)=0$ 同时成立的点 (x,y) 称为函数的驻点. 可导函数的极值点必为驻点，但是函数的驻点却不一定是极值点. 例如，函数 $z=x^2-y^2$（双曲抛物面），点 $(0,0)$ 虽是驻点，但却不是它的极值点.

定理 2（极值存在的充分条件）　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内具有二阶连续偏导数，且点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数的驻点，即 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. 若记 $A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则有：

(1) 当 $B^2-AC<0$ 时，$P_0(x_0,y_0)$ 为极值点，且若 $A<0$（或 $C<0$），点 $P_0(x_0,y_0)$ 为极大值点；若 $A>0$（或 $C>0$），点 $P_0(x_0,y_0)$ 为极小值点；

(2) 当 $B^2-AC>0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 为非极值点；

(3) 当 $B^2-AC=0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 可能是极值点也可能不是极值点.

证明（略）

例 1　求函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

解　令 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$，则

$$f_x(x,y)=3x^2-3y,f_y(x,y)=3y^2-3x,$$

$$A=f_{xx}(x,y)=6x,B=f_{xy}(x,y)=-3,C=f_{yy}(x,y)=6y.$$

解方程组$\begin{cases}3x^2-3y=0\\3y^2-3x=0\end{cases}$得驻点为$(0,0)$，$(1,1)$.

关于驻点$(1,1)$，有 $f_{xx}(1,1)=6$，$f_{xy}(1,1)=-3$，$f_{yy}(1,1)=6$，所以

$$B^2-AC=(-3)^2-6\times6=-27<0\text{，且 }A=6>0.$$

因此，$f(x,y)$ 在点$(1,1)$ 取得极小值，$f(1,1)=-1$.

关于驻点$(0,0)$，有 $f_{xx}(0,0)=0$，$f_{xy}(0,0)=-3$，$f_{yy}(0,0)=0$，所以

$$B^2-AC=(-3)^2-0\times0=9>0,$$

因此，$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 不取得极值.

二、二元函数的最大值与最小值

与一元函数类似，我们可以由二元函数的极值来求它的最大值和最小值，只需将函数在指定区域 D 内所有驻点处的函数值比较大小，最大的为函数的最大值，最小的为最小值. 而且前面我们提到对于二元函数有结论：若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必有最大值和最小值.

在很多实际问题中，若根据问题的性质可以判断函数在区域 D 中一定有最大值或最小值，而函数在 D 内只有一个驻点，则可以断定该点处的函数值就是 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值或最小值.

例 2　用铁皮设计一个体积为 64 m^3 的封闭长方体容器，问长、宽、高各取多少时，用料最省？

解　设长、宽、高分别为 x，y，z，则 $xyz=64$.

当表面积最小时，用料最省，即求 S 的最小值，且

$$S=2(xy+yz+xz)$$

由 $xyz=64$，可得

$$z=\frac{64}{xy}$$

代入 S 中，得

$$S=2\left(xy+y\cdot\frac{64}{xy}+x\cdot\frac{64}{xy}\right)=2\left(xy+\frac{64}{x}+\frac{64}{y}\right)$$

解方程组

$$\begin{cases}S_x=2\left(y-\dfrac{64}{x^2}\right)=0\\[2ex]S_y=2\left(x-\dfrac{64}{y^2}\right)=0\end{cases}$$

得 S 的唯一驻点$(4,4)$. 此时

$$z=\frac{64}{xy}=4$$

由于在本题中，一定存在着使表面积最小的方案，故此唯一驻点就是 S 的极小值的点，极小值为

$$S=2(4\times 4+\frac{64}{4}+\frac{64}{4})=96\ \mathrm{m}^2$$

此时长、宽、高分别为 4 m、4 m、4 m.

例 3 某种药品在生产过程中需要两种原料药. 用 z 表示药品的产量，分别用 x,y 表示两种原料药的投入量，则有下面关系：

$$z=4xy+6x+20y-2x^2-3y^2$$

若原料药 x,y 的成本单价分别为 10 元和 4 元，而生产出的药品单价为 50 元，求能够获取的最大利润.

解 药品的收入函数为

$$H=50\cdot z(x,y)=200xy+300x+1\ 000y-100x^2-150y^2$$

而成本金额为

$$C=10x+4y$$

因此利润为

$$R(x,y)=H-C=200xy+290x+996y-100x^2-150y^2$$

解方程组

$$\begin{cases}R_x=200y+290-200x=0\\R_y=200x+996-300y=0\end{cases}$$

得唯一驻点(14.31,12.86).

由于利润的最大值一定存在，故该驻点就是利润函数的最大值点，利润的最大值为

$$\begin{aligned}R_{\max}&=200\times 14.31\times 12.86+290\times 14.31+\\&\quad 996\times 12.86-100\times 14.31^2-150\times 12.86^2\\&=8\ 479.23\approx 8\ 479\ \text{元}\end{aligned}$$

因此，当原料药分别投入 14.31 和 12.86 时，可获得最大利润 8 479 元.

三、条件极值

从前面内容中可以看到，在求二元函数的极值时，如果没有任何附加条件，可以直接求解，但实际中的很多求极值的问题往往带有附加条件，如在例 2 中，要求容器的体积是 64 m^3. 这种带有附加条件的极值问题称为条件极值.

在有些求解条件极值问题中，可以将条件极值转化成无条件极值求解. 例如，在

例 4 中，由条件 $xyz=64$ 解出 $z=\dfrac{64}{xy}$，代入所求函数 $S=2(xy+yz+xz)$ 中，于是将 S 转化成了关于 x,y 的二元函数，再求它的无条件极值. 但是这种方法也有局限性，因为如果在附加条件中解出某个变量（如解出 z）比较困难时，就很不方便. 下面介绍一种直接求条件极值的方法 —— **拉格朗日乘数法**.

求二元函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值.

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，$y=y(x)$ 是由条件 $\varphi(x,y)=0$ 确定的隐函数，则一元函数 $z=f(x,y(x))$ 在 $x=x_0$ 处取得极值.

假设 $z=f(x,y)$ 以及 $\varphi(x,y)=0$ 都有一阶连续偏导数，且 $\varphi_y(x,y)\neq 0$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0$$

而 $y=y(x)$ 由方程 $\varphi(x,y)=0$ 确定，由隐函数的微分法，得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$$

代入上式中，得

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=0$$

即
$$\frac{f_x(x_0,y_0)}{\varphi_x(x_0,y_0)}=\frac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$$

令
$$\frac{f_x(x,y)}{\varphi_x(x,y)}=\frac{f_y(x,y)}{\varphi_y(x,y)}=-\lambda$$

其中 λ 为待定常数，由于极值点必定满足条件方程 $\varphi(x,y)=0$，$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极值的必要条件为

$$\left.\begin{aligned}&f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0\\&f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0\\&\varphi(x_0,y_0)=0\end{aligned}\right\}\tag{4-4-1}$$

则由方程(4-4-1)得到的解就是 $z=f(x,y)$ 的驻点.

令
$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)\tag{4-4-2}$$

于是求 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点就转化为求方程(4-4-2)的极值点问题. 方程(4-4-2)称为**拉格朗日函数**，λ 为**待定常数**，又称为**拉格朗日乘子**. 这种求条件极值的方法称为**拉格朗日乘数法**，步骤如下：

(1) 构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

(2) 求解方程组

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x(x,y) = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y(x,y) = 0 \\ F_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

求解出可能的极值点(x_0,y_0)和系数 λ.

(3) 判断所求的(x,y)是否为极值点.

对于三元函数 $z = f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z) = 0$ 下的极值问题可以同样求解.

例 4 用拉格朗日乘数法解例 4 中的问题.

解 以长、宽、高分别为 x,y,z 的封闭容器的表面积为

$$S = 2(xy + yz + xz)$$

附加条件

$$xyz = 64$$

即

$$\varphi(x,y,z) = xyz - 64 = 0$$

构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda) = S + \lambda\varphi(x,y,z) = 2(xy + yz + xz) + \lambda(xyz - 64)$$

求解方程组

$$\begin{cases} F_x = 2(y+z) + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2(x+z) + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x+y) + \lambda xy = 0 \\ xyz - 64 = 0 \end{cases}$$

可解得

$$x = y = z = 4, \quad \lambda = -1$$

于是$(4,4,4)$为 F 的唯一驻点.

由于此题中 S 一定存在面积最小的情况,故$(4,4,4)$即为最小值点,对应的最小值为

$$S = 96\ \mathrm{m}^2$$

例 5 一圆柱体由周长为 C 的一个矩形绕其一边、 而成,问当矩形的边长各为多少时,圆柱体的体积最大?

解 设矩形的长、宽分别为 x,y,则有条件

$$2(x+y) = C$$

则圆柱体的体积为

$$V = \pi x^2 \cdot y$$

于是问题为求 V 在条件 $2(x+y) = C$ 下的最大值.

构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=\pi x^2 y+\lambda[2(x+y)-C]$$

求解方程组

$$\begin{cases}F_x=2\pi xy+2\lambda=0\\ F_y=\pi x^2+2\lambda=0\\ 2(x+y)-C=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{C}{2}\\ \lambda=0\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=\dfrac{C}{3}\\ y=\dfrac{C}{6}\\ \lambda=-\dfrac{\pi C^2}{18}\end{cases}$$

当 $x=0,y=\dfrac{C}{2}$ 时，$V=0$；当 $x=\dfrac{C}{3},y=\dfrac{C}{6}$ 时，$V=\dfrac{\pi C^3}{54}$. 显然，$(0,\dfrac{C}{2})$ 是 V 的最小值点；$(\dfrac{C}{3},\dfrac{C}{6})$ 是 V 的最大值点. 因此，当矩形的长为$\dfrac{C}{3}$，宽为$\dfrac{C}{6}$，绕长边、时，得到的圆柱体体积最大.

第五节　曲线的凹凸性与拐点

前面利用导数知识研究了函数的单调性，极值及最值问题，本节继续利用导数知识来研究函数图象的弯曲方向和弯曲方向的转变点，以便用所学习的知识更准确地描绘函数的图象.

一、曲线凹凸性定义及其判定法

函数的单调性在图象上的反映就是曲线的上升或下降. 但是，曲线在上升或下降的过程中，还有一个弯曲方向的问题. 如图 4-5-1 所示，曲线弧虽然一直是上升的，但在不同区间所对应的图象的弯曲方向明显不同，曲线在区间 (a,b) 内是上凹的，曲线在区间 (b,c) 内是上凸的. 且在区间 (a,b) 内任意取两点，连接这两点的弦总位于这两点间的弧段的上方，但在区间 (b,c) 内任意取两点，连接这两点的弦总位于这两点间的弧段的下方. 曲线的这种性质就是曲线的**凹凸性**. 下面给出曲线凹凸性的定义.

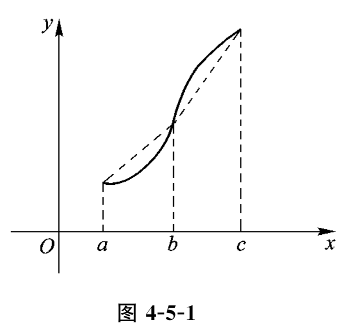


图 4-5-1

定义 1　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1,x_2，恒有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$ **在 I 上的图象是(向上)凹的**;如果恒有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$ **在 I 上的图象是(向上)凸的.**

由图 4-5-2 可以看出,如果曲线是凹的,ī　切线的倾斜角 φ 随着自变量 x 增大而增大,即切线的斜率也是递增的.也就是说导函数 $f'(x)$ 本身是单调增加的,所以 $f''(x) > 0$.

由图 4-5-3 可以看出,如果曲线是凸的,ī　切线的倾斜角 φ 随着自变量 x 增大而减小,即切线的斜率也是递减的.也就是说导函数 $f'(x)$ 本身是单调减少的,所以 $f''(x) < 0$.下面给出曲线凹凸性的判定定理.

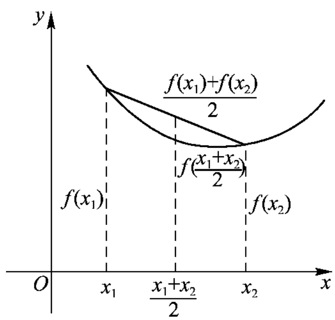


图 4-5-2

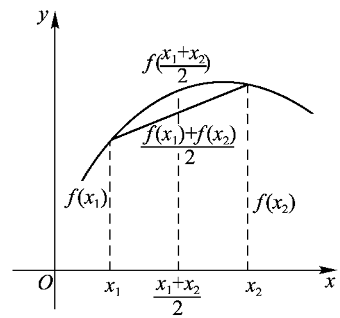


图 4-5-3

定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$,ī　曲线在 $[a,b]$ 上的图形是**凹的**;

(2) 如果在 (a,b) 内 $f''(x) < 0$,ī　曲线在 $[a,b]$ 上的图形是**凸的.**

该定理对于其他类型区间也成立.

例 1　判断曲线 $y=\frac{1}{x}$ 的凹凸性.

解　$y'=-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$,如图 4-5-4 所示.当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$y''>0$,曲线是凹的;当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$y''<0$,曲线是凸的.

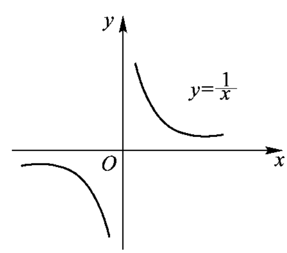


图 4-5-4

例 2　判断曲线 $y=x^4-2x^3+3$ 的凹凸性.

解　$$y'=4x^3-6x^2$$

$$y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$$

当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时，$y'' > 0$；当 $0 < x < 1$ 时，$y'' < 0$.

所以曲线在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 内是凹的，而在区间 $(0,1)$ 内是凸的.

二、曲线的拐点及求法

在例2中，曲线上的点 $(0,3)$ 和 $(1,2)$ 是两个特殊的点，其中点 $(0,3)$ 是曲线由凹变凸的分界点，而点 $(1,2)$ 却是由凸变凹的分界点，这样的点就是曲线的拐点，下面给出拐点的定义.

定义2　如果连续曲线 $y = f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性发生改变，也就是说，点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的凸与凹的分界点，那么称 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的**拐点**.

下面来讨论曲线 $y = f(x)$ 的拐点的求法.

由于拐点是曲线凹凸性分界点，所以拐点的左右两侧近旁 $f''(x)$ 必然异号，因此，曲线拐点的横坐标 x_0，只可能是使得 $f''(x) = 0$ 的点或 $f''(x)$ 不存在的点，从而可得拐点的求法：

(1) 写出 $y = f(x)$ 的定义域；

(2) 求出 $f''(x) = 0$ 的点或 $f''(x)$ 不存在的点；

(3) 列表考察(2)中各点两侧 $f''(x)$ 是否异号，若异号，则与该点对应的曲线上的点就是拐点，否则就不是拐点.

例3　求 $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸区间及拐点.

解　该函数的定义区间为 $(-\infty, +\infty)$.

$y' = \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$，$y'' = \dfrac{2(5x+1)}{9x\sqrt[3]{x}}$.

令 $y'' = 0$，解得 $x = -\dfrac{1}{5}$，且当 $x = 0$ 时，y'' 不存在.

为方便起见，列出下表：

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$	$-\frac{1}{5}$	$\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	不存在	$+$
y	凸	拐点	凹	非拐点	凹

所以曲线在 $\left(-\infty, -\dfrac{1}{5}\right)$ 内是凸的，在 $\left(-\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$ 内是凹的，且当 $x = -\dfrac{1}{5}$ 时，

$y=-\dfrac{6}{5\sqrt[3]{25}}$,故$\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{6}{5\sqrt[3]{25}}\right)$为曲线的拐点.

第六节　简单函数图象的描绘

一、曲线的渐近线

定义 1　若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时,点 P 与某一固定直线 L 的距离趋于零,则称直线 L 为曲线 C 的渐近线(如图 4-6-1 所示).

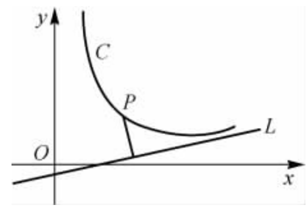


图 4-6-1

并不是任何曲线都有渐近线,下面分三种情况进行介绍.

1. 斜渐近线

定理 1　若 $y=f(x)$ 满足:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$,

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$,

则曲线 $y=f(x)$ 有**斜渐近线** $y=kx+b$.

证明(略).

例 1　求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的斜渐近线.

解　令 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$,因为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x-3}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x\right)=-2,$$

所以得曲线的斜渐近线方程为 $y=x-2$.

2. 垂直渐近线

定义 2　若 $x\to C$ 时(有时仅当 $x\to C^+$ 或 $x\to C^-$),有 $f(x)\to\infty$,则称直线 $x=C$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**垂直渐近线**(也称铅直渐近线,其中 C 为常数).

例 2　求曲线 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 的垂直渐近线.

解　因为 $y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$

当 $x \to 1$ 或 $x \to -1$ 时，均有 $y \to \infty$，

所以 $x = 1$ 及 $x = -1$ 是曲线 $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ 的两条垂直渐近线.

3. 水平渐近线

定义 3　若当 $x \to \infty$ 时，$f(x) \to C$（C 为常数），则称曲线 $y = f(x)$ 有水平渐近线 $y = C$.

例 3　求曲线 $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ 的水平渐近线.

解　因为当 $x \to \infty$ 时，有 $y = \mathrm{e}^{-x^2} \to 0$，根据定义 3 知，$y = 0$ 是曲线 $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ 的一条水平渐近线.

二、函数图象的描绘

描绘函数图象过程反映了研究函数的过程. 图象是函数的直观表示，可以使函数的各种性态一目了然，无论对定性的分析，还是对定量的计算，都能看出变化的规律. 作图的步骤可概括为以下几点：

(1) 确定函数的定义域，并讨论函数的周期性、奇偶性等；

(2) 讨论函数的单调性、极值点和极值；

(3) 讨论函数图象的凹凸区间和拐点；

(4) 讨论函数图象的水平渐近线和垂直渐近线；

(5) 根据需要补充函数图象上的若干点（如与坐标轴的交点等）；

(6) 描点绘图.

例 4　描绘函数 $y = 3x - x^3$ 的图象.

解　该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，且为奇函数. 因为

$$y' = 3 - 3x^2, \quad y'' = -6x$$

令 $y' = 0$，得驻点

$$x = \pm 1$$

而
$$y''|_{x=-1} = 6 > 0, \quad y''|_{x=1} = -6 < 0$$

所以 $y(-1) = -2$ 为极小值，$y(1) = 2$ 为极大值.

令 $y'' = 0$，解得 $x = 0$，因为当 $x < 0$ 时，$y'' > 0$，当 $x > 0$ 时，$y'' < 0$，所以当 $x < 0$ 时，曲线是凹的，当 $x > 0$ 时，曲线是凸的，且 $(0,0)$ 为拐点. 通过讨论 y' 的符号情况，可以确定函数的单调区间，将上述讨论列为下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	单调减 凹	极小值 -2	单调增 凹	拐点$(0,0)$	单调增 凸	极大值 2	单调减 凸

令 $y=0$,可知曲线与 x 轴交在 $x=\pm\sqrt{3}$ 处.显然,曲线没有水平渐近线和垂直渐近线.

综述讨论,即描出所给函数的图象,如图 4-6-2 所示.

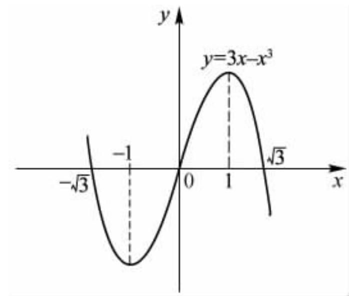


图 4-6-2

第五章　不定积分

微分学的基本问题是已知一个函数，求它的导函数，但在科学技术领域的应用中，往往会遇到相反的问题：已知一个函数 $f(x)$，求原来的函数，这样的问题实际上是微分的逆运算，即**不定积分**. 本章主要研究不定积分的概念、性质及基本积分方法.

第一节　不定积分的概念和性质

一、原函数与不定积分

1. 原函数

定义 1　设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义，如果存在函数 $F(x)$，对于该区间上任一点 x，使

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称函数 $F(x)$ 是已知函数 $f(x)$ 在该区间上的一个**原函数**.

例如，$(\sin x)' = \cos x$，故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个原函数.

关于原函数，我们有如下说明：

(1) 如果函数 $f(x)$ 在定义区间上是连续的，那么在这个区间上存在可导函数 $F(x)$ 使得

$$F'(x) = f(x).$$

(2) 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在某区间上的一个原函数，则函数族 $F(x)+C$（C 为任意常数）都是 $f(x)$ 在该区间上的原函数，这是因为 $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$.

(3) 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在某区间上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 包含了 $f(x)$ 在这个区间上的所有原函数. 事实上，我们令 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，即 $G'(x) = f(x)$，于是有 $[F(x)-G(x)]' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$，这说明 $F(x)$ 与 $G(x)$ 只相差一个常数，即 $F(x)-G(x) = C$，所以 $G(x) = F(x)+C$.

2. 不定积分

定义 2　若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$（C 为任意常

数）称为 $f(x)$ 在该区间上的**不定积分**，记为$\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

其中符号“$\int$”称为**不定积分号**，$f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，或称**被积分式**，x 称为**积分变量**，C 称为**积分常数**.

3. 不定积分的几何意义

通常我们把一个原函数 $F(x)$ 的图象称为 $f(x)$ 的一条积分曲线，其方程为 $y = F(x)$，因此，不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上就表示全体积分曲线所组成的积分曲线族，它们的方程是 $y = F(x) + C$.

例 1　求下列不定积分.

(1)$\int x^2 \mathrm{d}x$；　　　　(2)$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$；

(2) 因为 $x > 0$ 时，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$，又 $x < 0$ 时，$[\ln(-x)]' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$，

所以$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln |x| + C$.

例 2　设曲线过点(1,2)，且斜率为 $2x$，求曲线方程.

解　设所求曲线方程为 $y = y(x)$.

依题意，有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$，故 $y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$. 又因为曲线过点(1,2)，故点(1,2)适合此方程，于是 $2 = 1 + C$，解得 $C = 1$.

因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

二、不定积分的性质

根据不定积分的定义可以直接得到不定积分的下列性质。

性质 1　不定积分与求导或微分互为逆运算。

(1)$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$

(2)$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 或$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$

性质 2　被积分式中的非零常数因子可以移到积分号前.

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k\neq 0, k\text{ 为常数})$$

性质 3　两个函数代数和的不定积分等于两个函数积分的代数和.

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

三、基本积分表

由于求不定积分与求导数是互逆的运算，因此，由导数的基本公式就可以得到相应的不定积分的基本公式. 为了便于记忆和应用，我们把一些基本的积分公式列成一个表，通常称为**基本积分表**.

(1) $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$　(k 是常数)；

(2) $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$　($\alpha\in\mathbf{R}, \alpha\neq -1$)；

(3) $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$；

(4) $\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$　($a>0, a\neq 1$)；

(5) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$；

(6) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

(7) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$；

(8) $\int \sec^{2}x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$；

(9) $\int \csc^{2}x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

(10) $\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$；

(11) $\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

(12) $\int \dfrac{1}{1+x^{2}}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$；

(13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$.

以上公式是求不定积分的基础，必须熟记. 在应用这些公式时，有时需要对被积函数作适当的变形.

例 3 求$\int(3\mathrm{e}^x+2\cos x)\mathrm{d}x$.

解 $\int(3\mathrm{e}^x+2\cos x)\mathrm{d}x=3\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+2\int\cos x\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^x+2\sin x+C$

例 4 求$\int\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解 应用不定积分基本公式(2),有

$$\int\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}+C=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C$$

例 5 求$\int\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

解 应用不定积分基本公式(2),有

$$\int\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+C=-3x^{-\frac{1}{3}}+C$$

注意 上述两个例题实际上是幂函数的积分问题,但是表示上是取用了根式和分式形式,遇到这样的情况一样先化成 x^α 的形式,再根据不定积分基本公式(2)来求不定积分.

例 6 求$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\sec x\tan x\,\mathrm{d}x=\sec x+C$

例 7 求$\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2-(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=2\arctan x-x+C.$

例 8 求$\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解 由三角函数的半角公式,有 $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$

所以$\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C.$

第二节 换元积分法

利用直接积分法所能计算的不定积分是有限的,为了能够解决更多函数的积分

问题,我们有必要寻求其他的积分法,下面介绍换元积分法.

一、第一类换元积分法(凑微分法)

定理1　如果$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,则$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$.其中$u=\varphi(x)$是$x$的任一可微函数.

证　由于$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,所以$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$.根据微分形式不变性,则有

$\mathrm{d}F(u)=f(u)\mathrm{d}u$,其中$u=\varphi(x)$是$x$的可微函数,由此得

$$\int f(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}F(u) = F(u)+C.$$

这个定理说明,在基本积分公式中,自变量x换成任一可微函数$u=\varphi(x)$之后公式仍然成立,这就大大扩充了基本积分公式的使用范围.

运用这一结论,计算不定积分的程序如下.

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = \int f(u)\mathrm{d}u$$

这种先"凑"微分式,再作变量置换的方法,称为**第一换元积分法**,又称凑微分法.

例1　求$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解　因为$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$,令$x^2=u$,则有

$\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2) = \int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + C$,再将$u=x^2$代入得$\mathrm{e}^u+C=\mathrm{e}^{x^2}+C$.于是

$$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2}+C.$$

例2　求$\int \cos^2 x\sin x\mathrm{d}x$.

解　设$u=\cos x$,得$\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$.则

$$\int \cos^2 x\sin x\mathrm{d}x = -\int u^2\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}u^3+C = -\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

方法比较熟悉后,可略去中间的换元步骤,直接凑微分成积分公式的形式.

例3　求$\int (3x-2)^5\mathrm{d}x$.

解　$\int (3x-2)^5\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int (3x-2)^5\mathrm{d}(3x-2) = \frac{1}{18}(3x-2)^6+C.$

一般地，对于不定积分$\int f(ax+b)\mathrm{d}x$，可以把$\mathrm{d}x$凑成$\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$，于是$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$，再作变换$t=ax+b$.

例 4　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$.

解　$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

例 5　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}(x\neq a)$.

解　$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}&=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2a}\left[\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}-\int\frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}\right]\\&=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C\\&=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.\end{aligned}$$

例 6　求$\int\sec x\mathrm{d}x$.

解　$$\begin{aligned}\int\sec x\mathrm{d}x&=\int\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\tan x+\sec x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2x+\sec x\tan x}{\tan x+\sec x}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}=\ln|\sec x+\tan x|+C.\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

例 7　求$\int\sin 5x\cos 3x\mathrm{d}x$.

解　$$\begin{aligned}\int\sin 5x\cos 3x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}\int\sin 8x\mathrm{d}(8x)+\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}(2x)\right]\\&=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.\end{aligned}$$

例 8　求$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C.$

例 9 求$\int \sin^3 x dx$.

解 $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)d(\cos x)$

$$= -\int d(\cos x) + \int \cos^2 x d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

二、第二类换元积分法

第一换元积分法是将积分$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$凑成$\int f(u)du$的形式，积出结果再回代而得到最后的答案. 但在实际解题中，往往要用到与此相反的换元过程，有些被积表达式一开始就要作变换 $x=\varphi(t)$，把被积表达式化成容易求积分的形式，对此，我们有如下定理：

定理 2 设函数 $f(x)$ 连续，函数 $x=\varphi(t)$ 单调可微，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t)+C = F[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

这种积分方法称为**第二换元积分法**. 它与第一换元积分法的不同点是原积分变量是新积分变量的函数. 第二换元积分法的关键在于选择合适的换元 $x=\varphi(t)$.

例 10 求$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

解 为了消去根式，可令$\sqrt{x}=t(t>0)$，则 $dx=2tdt$. 于是

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t}dt$$

$$= 2\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 2\int (t-1+\frac{1}{1+t})dt$$

$$= t^2-2t+2\ln|1+t|+C$$

$$= x-2\sqrt{x}+2\ln|1+\sqrt{x}|+C.$$

例 11 求$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$.

解 令$\sqrt{2x-1}=t$，则 $x=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$，$dx=tdt$，于是

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}}{t}\cdot t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t + C$$
$$= \frac{1}{6}[(2x-1)^{\frac{3}{2}} + 3(2x-1)^{\frac{1}{2}}] + C.$$

例 12 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解 令$\sqrt[6]{x}=t$,则 $x=t^6$,$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$,于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\mathrm{d}t$$
$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 6\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|t+1|\right) + C$$
$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

例 13 求$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\,(a>0)$.

解 令 $x=a\sin t$,$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$是 t 的单调、可导函数,于是
$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$. 又 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,于是

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$
$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C.$$

因为 $\sin t=\frac{x}{a}$,则 $\cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$,代入上面的结果,原积分为

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

为了将变量还原,还可根据 $\sin t=\frac{x}{a}$ 作辅助直角三角形(如图 5-2-1 所示),得 $\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

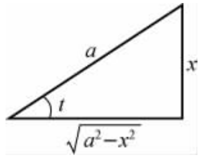


图 5-2-1

例 14 求$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}(a>0)$.

解 令 $x=a\tan t$,则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$,$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$.于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int \frac{a\sec^2 t\mathrm{d}t}{a\sec t}=\int \sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C.$$

为了将变量还原,可根据 $\tan t=\dfrac{x}{a}$ 作辅助直角三角形(如图 5-2-2 所示),则有 $\sec t=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$,于是,可得原积分为

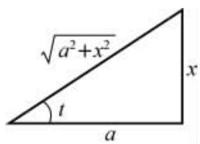


图 5-2-2

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}&=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C'\\&=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C\ (C=C'-\ln a)\end{aligned}$$

当被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时,可作代换 $x=a\sec t$.为了将变量还原,可根据 $\sec t=\dfrac{x}{a}$ 作辅助直角三角形(如图 5-2-3 所示),有 $\tan t=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$.

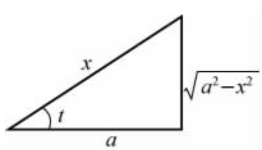


图 5-2-3

例 15 求$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}}$$

$$= \ln\left| x+1+\sqrt{x^3+2x+4} \right| + C.$$

当被积函数含有二次三项式 ax^2+bx+c 或 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 时，可先对二次三项式配方，然后再进行换元积分.

第三节　分部积分法

除了换元积分法外，还有一个重要的积分方法，即分部积分法. 分部积分法是由两个函数乘积的微分公式得来的.

设关于 x 的函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续导数，由微分公式

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$$

移项，得

$$u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u$$

两边积分，得

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \tag{5-3-1}$$

式(5-3-1)就称为**分部积分公式**. 它可以将求 $\int u\mathrm{d}v$ 的积分问题转化为求 $\int v\mathrm{d}u$ 的积分，当后者积分容易计算时，分部积分就起到了化难为易的作用.

例 1　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解　将 $x\cos x\mathrm{d}x$ 看成是 x 与 $\cos x\mathrm{d}x$ 的乘积，可设

$$u = x, \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x$$

于是有

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, v = \sin x$$

由式(5-3-1)得

$$\int x\cos x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\sin x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

为了说明问题，不妨做另外一种假设，即把 $x\cos x\mathrm{d}x$ 看成 $\cos x$ 与 $x\mathrm{d}x$ 的乘积，则有

$$\int x\cos x\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\cos x - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}\cos x = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x$$

新得到的积分 $\int \frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x$ 反而比原积分更难求！因此，应用分部积分法求不定

积分的时候,适当选取 u 和 dv 是问题的关键.选得合适就能实现**降低积分难度**的目的,如果选取不适当不仅可能不降低难度,还可能增加了积分的难度.

例 2 求$\int x^2\ln x\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\ln x, \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x$.由式(5-3-1)得

$$\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\int \ln x\,\mathrm{d}\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\mathrm{d}\ln x$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$$

例 3 求$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

解 设 $u=x^2, \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.由式(5-3-1)得

$$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C$$

例 4 求$\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\arctan x, \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$.由式(5-3-1)得

$$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}\arctan x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

例 5 求$\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解 $\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x-\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$$=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)-\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x.$$

将再次出现的$\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$ 移到等式左边,可以得到

$$2\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C$$

两边除以 2，得所求的积分

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

从上例可见，积分运算有时需要多次使用分部积分，当出现了“循环现象”时，还需要通过移项求解. 下面的例子说明不定积分运算有时候要同时使用换元积分法和分部积分法.

例 6 求$\int e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int e^t \times 2t\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{d}e^t = 2te^t - 2\int e^t\mathrm{d}t = 2te^t - 2e^t + C \xlongequal{\text{代回原变量}} 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

一般情况下，在我们使用分部积分法的时候有下述规律：

(1) 若被积函数是幂函数和三角函数的乘积或幂函数和指数函数的乘积，则把三角函数乘$\mathrm{d}x$ 或指数函数乘 $\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}v$ 的形式；

(2) 若被积函数是幂函数和反三角函数的乘积或幂函数和对数函数的乘积，则把幂函数乘 $\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}v$ 的形式.

* 第四节 有理函数的积分

有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数，又称有理分式，即 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，这里 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 不可约，当 $Q(x)$ 的次数高于 $P(x)$ 的次数时，$R(x)$ 是真分式，否则 $R(x)$ 是假分式. 我们利用多项式除法，总能把假分式化为一个多项式与真分式之和的形式，对于多项式部分可以逐项积分，因此我们只要能将真分式化为若干个简单分式（又称部分分式）的和，再对各个简单分式逐项积分，问题就可以解决了.

为了达到这一目的，可先将分母 $Q(x)$ 分解为一次因式（可能有重因式）和二次质因式的乘积，然后将真分式按照分母因式的不同情况，分解成若干个简单分式之和. 具体分法讨论如下.

讨论 1 当分母 $Q(x)$ 含有单因式 $(x-a)$ 时，这时分解式中对应有一项$\frac{A}{x-a}$，其中 A 为待定系数.

例如，$R(x)=\dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$.

为确定系数 A,B,C,将上式两边同乘以 $x(x-1)(x+2)$,可得

$$2x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

因为这是一个恒等式,将任何 x 值代入都相等. 故可令 $x=0$,得 $3=-2A$,即$A=-\dfrac{3}{2}$.

类似地,令 $x=1$,得 $B=\dfrac{5}{3}$;令 $x=-2$,得 $C=-\dfrac{1}{6}$.

于是得到

$$R(x)=\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{-\frac{3}{2}}{x}+\frac{\frac{5}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{6}}{x+2}.$$

讨论 2 当分母 $Q(x)$ 含有重因式$(x-a)^n$ 时,这时部分分式中相应有 n 个项:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}.$$

例如,$\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}$.

为了确定系数 A,B,C,将上式两边同乘以 $x(x-1)^2$,得

$$x^2+1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$$

令 $x=0$,得 $A=1$;令 $x=1$,得 $B=2$;令 $x=2$,$5=A+2B+2C$,代入已求得的 A,B 的值,得 $C=0$.

所以$\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

讨论 3 当分母 $Q(x)$ 中含质因式 x^2+px+q 时,这时部分分式中相应有一项$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

例如,$\dfrac{x+4}{x^3+2x-3}=\dfrac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+3}$. 将上式两边同乘以$(x-1)(x^2+x+3)$,得

$$x+4=A(x^2+x+3)+(Bx+C)(x-1)$$

令 $x=1$,得 $A=1$;令 $x=0$,得 $4=3A-C$,即 $C=-1$;令 $x=2$,得 $6=9A+2B+C$,即 $B=-1$.

所以$\dfrac{x+4}{x^3+2x-3}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-x-1}{x^2+x+3}$.

例 1 求$\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\mathrm{d}x$.

解 由“讨论 1”中例子的结果，有

$$\begin{aligned}\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{-\frac{3}{2}}{x}+\frac{\frac{5}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{6}}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{5}{3}\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C.\end{aligned}$$

例 2 求 $\int\frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$.

解 由“讨论 2”中例子的结果，有

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x&=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x\\&=\ln|x|-\frac{2}{x-1}+C.\end{aligned}$$

很明显，对于讨论 1 和讨论 2 两种情形的积分，使用简单的凑微分法即可获解.对于第三种情形，即分母中含有质因式 x^2+px+q 的积分，可参考下面例 3 的解法.

例 3 求 $\int\frac{3x-2}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$.

解 改写被积函数的分子为 $3x-2=\frac{3}{2}(2x+2)-5$，要注意式中 $2x+2$ 恰好是分母的导数，即 $2x+2=(x^2+2x+4)'$，于是有

$$\begin{aligned}\int\frac{3x-2}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x&=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x-5\int\frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}-5\int\frac{1}{(x^2+2x+1)+3}\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+4|-5\int\frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+4|-\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

例 4 求 $\int\frac{x^2}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解 被积函数是真分式，分母中 $1+x^2$ 为二次质因式，所以可令

$$\frac{x^2}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

将等式两边同乘以$(1+2x)(1+x^2)$，得

$$x^2=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x)$$

为了求待定系数A,B,C，分别令$x=-\frac{1}{2}$，得$A=\frac{1}{5}$；令$x=0$，得$C=-\frac{1}{5}$；令$x=1$，得$B=\frac{2}{5}$.

所以

$$\frac{x^2}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{1}{5}}{1+2x}+\frac{\frac{2x}{5}-\frac{1}{5}}{1+x^2}$$

于是

$$\begin{aligned}&\int\frac{x^2}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x+\frac{1}{5}\int\frac{2x-1}{1+x^2}-\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{10}\ln|1+2x|+\frac{1}{5}|1+x^2|-\frac{1}{5}\arctan x+C.\end{aligned}$$

第六章　定积分及应用

定积分和不定积分是积分学中紧密相关的两个基本概念，定积分的计算可以通过**牛顿－莱布尼茨公式**转化为求不定积分的计算问题，反之，不定积分的存在性问题又可以通过定积分来解决．定积分在自然科学和实际问题中的应用非常广泛．本章先从几何与物理问题出发引进定积分的定义，讨论定积分的性质与计算方法，最后讨论定积分在几何及物理中的应用．

第一节　定积分的概念

一、两个实际问题

1. 曲边梯形的面积

设曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方且连续，由这条曲线和直线 $x=a,x=b,y=0$ 所围成的图形（如图 6-1-1 所示）称为曲边梯形，其中曲线称为曲边．由于曲边梯形在底边上的高 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上是变化的，所以它的面积不能直接运用初等数学方法计算出来，于是我们采用如下方法来解决：

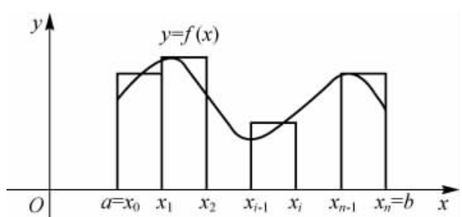


图 6-1-1

第一步　分割．任取分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把底边$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,3,\cdots,n)$，小区间的长度记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$；

第二步　取近似．在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i，竖起高线为 $f(\xi_i)$，则得小长条面积 ΔA_i 的近似值为 $\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,3,\cdots,n)$；

第三步　求和. 把 n 个小矩形面积相加就得到曲边梯形面积的近似值,即

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

第四步　取极限. 为了保证全部 Δx_i 都无限缩小,我们要求小区间长度中最大值 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$ 趋向于零,这时和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限就是曲边梯形面积 A 的精确值,即

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{6-1-1}$$

2. 变速直线运动的路程

设物体做变速直线运动,已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上的连续函数,且 $v(t) \geqslant 0$,试计算这段时间内所走的路程.

如果是匀速直线运动,则路程 $s = v(T_2 - T_1)$,若 $v(t)$ 是变速,路程就不能使用初等方法求出. 下面我们仍用 1 中的方法来解决.

第一步　分割. 任取分点 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$,把 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小段,每小段长为 $\Delta t = t_i - t_{i-1}$;

第二步　取近似. 把每小段 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的运动视为匀速,任取时刻 $\xi \in [t_{i-1}, t_i]$,做乘积 $v(\xi_i)\Delta t_i$,显然这小段时间所走路程 Δs_i,可近似表示为

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i.$$

第三步　求和. 把 n 个小段时间上的路程相加,就得到总路程 s 的近似值,即

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

第四步　取极限. 记 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$,则

$$s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i. \tag{6-1-2}$$

二、定积分的概念

以上两个实例有不同的实际意义,前者是几何量后者是物理量,但计算这些量使用的方法是相同的. 抛开两个问题的实际意义,比较式(6-1-1)、式(6-1-2)两式,从表达式在数量关系上的共同特征,抽象出定积分的定义.

定义　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,在 $[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间,其长度

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \cdots)$$

在每个小区间$[x_i, x_{i-1}]$上任取一点ξ_i，做积

$$f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1, 2, \cdots)$$

做和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$(称为积分和)；记

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

若极限$\lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$存在，则称$f(x)$在$[a,b]$上可积，并称以上的极限值为函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中称$f(x)$为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$为**被积表达式**，x为**积分变量**，$[a,b]$为**积分区间**，a为**积分下限**，b为**积分上限**，$\int$为**积分号**.

注意　定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是乘积和的极限，它是一个数，与函数$f(x)$和区间$[a,b]$有关，而与积分变量的选择无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

由定积分的定义，前面两个实例可分别表述为：

由曲线$y = f(x)(\geqslant 0)$，直线$x = a, x = b$和x轴围成的曲边梯形面积为

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

以速度$v(t)(\geqslant 0)$做变速直线运动的物体，从时刻T_1到T_2通过的路程为

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$$

下面我们不加证明地给出函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积的两个充分条件.

定理1　若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上**连续**，则$f(x)$在$[a,b]$上**可积**.

定理2　若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上**有界**，且只有**有限**个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上**可积**.

三、定积分的几何意义

在求曲边梯形的面积问题中，我们看到，如果$f(x) > 0$，图形在x轴之上，积分值为正，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$；如果$f(x) \leqslant 0$，ī　图形位于$x$轴下方，积分值为负，即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$.

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负时，则积分值就等于曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴上方部分与下方部分面积的代数和，如图 6-1-2 所示，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3.$$

这就是定积分的几何意义.

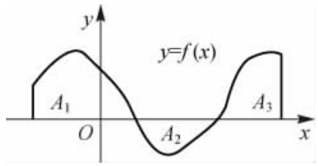


图 6-1-2

第二节　定积分的性质

为了计算及应用方便，先对定积分做如下两个规定.

(1) 当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$；

(2) 当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

在此基础上我们讨论定积分的以下性质. 假定下列各性质中的函数都在积分区间上可积，积分上下限的大小如不特别指明，均不加限制.

由定积分的定义、极限的性质和运算法则，可得定积分的性质 1 ～ 性质 5.

性质 1　函数代数和的定积分等于它们的定积分的代数和，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

性质 1 对于任意有限多个函数都是成立的.

性质 2　被积函数的常数因子可以提到积分号前，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ (k\ \text{为常数})$$

性质 3　a,b,c 为常数，不论 a,b,c 三点的相互位置如何，恒有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

性质 3 称为定积分对积分区间的可加性.

性质 4　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$

性质 5 如果在区间$[a,b]$上,$f(x)\geqslant 0$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0(a<b)$.

推论 1 若在$[a,b]$上$f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x(a<b)$$

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x(a<b)$.

由性质5和推论1可得性质6.

性质 6 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值为M,最小值为m,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)(a<b)$$

利用性质6,由被积函数在积分区间上的最大值与最小值可以估计积分值的大致范围.

例 1 估计定积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x$的值的范围.

解 令

$$f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x},x\in[0,\pi]$$

因$0\leqslant\sin^3 x\leqslant 1$,故$\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{3+\sin^3 x}\leqslant\frac{1}{3}$,将此不等式在$[0,\pi]$上积分,得

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{\pi}{4}\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{3}$$

性质 7(积分中值定理) 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在积分区间$[a,b]$上至少存在一点ξ,使下式成立:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)(a\leqslant\xi\leqslant b)$$

证 因为$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,所以$f(x)$在$[a,b]$上有最大值M和最小值m,由性质6知

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

记

$$c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

则

$$m\leqslant c\leqslant M$$

由闭区间上连续函数的介值定理,存在$\xi\in[a,b]$,使$f(\xi)=c$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

当 $b \leqslant a$ 时,显然上式也是成立的.

积分中值定理有以下的几何解释:设在$[a, b]$上的连续函数 $f(x) \geqslant 0$,则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ,使得以区间$[a,b]$为底边,曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于相同底边,高为 $f(\xi)$ 的矩形的面积,如图 6-2-1 所示.

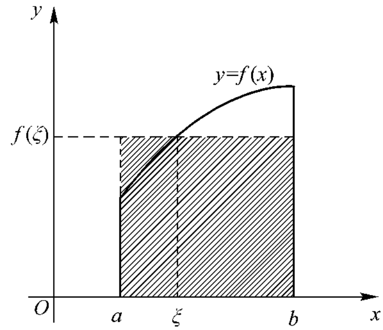


图 6-2-1

通常把积分中值定理中所得 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的积分平均值.

例 2　证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0$.

证　由积分中值定理,存在 $\xi \in (0,\frac{\pi}{4})$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sin^n\xi \times (\frac{\pi}{4}-0) = \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty} \sin^n\xi = 0$$

第三节　定积分的计算方法

定积分作为一种特定的和式的极限,尽管函数比较简单,但使用定积分的定义来计算定积分的值也是一件非常困难的事,这就要求去寻求一种简便而有效的计算方法来完成定积分的计算.

一、变上限的定积分

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$x \in [a,b]$,于是积分$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 是一个定值,但是这种写法有一个不方便之处,就是 x 既表示积分上限,又表示积分变量. 为了避免混淆,我们把积分变量改写成 t,于是这定积分就写成了$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

很明显,当 x 在$[a,b]$上变动时,对应于每一个 x 值,积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就有一个确定的值,因此,$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是变上限 x 的一个函数,记作

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t (a \leqslant x \leqslant b)$$

通常称 $\Phi(x)$ 为变上限积分函数或变上限积分,其几何意义如图 6-3-1 所示.

定理 1　如果函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,则变上限积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

在$[a,b]$上可导,且其导数是

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$$

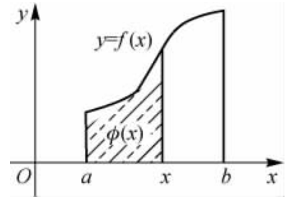


图 6-3-1

证 当上限x获得改变量Δx时,函数$\Phi(x)$获得改变量$\Delta\Phi$,由图6-3-2可知

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

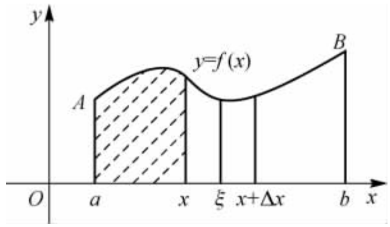


图 6-3-2

由积分中值定理,得

$$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x(\xi\in(x,x+\Delta x)),\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi)$$

再令$\Delta x\rightarrow 0$,从而$\xi\rightarrow x$,由$f(x)$的连续性,得

$$\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\xi\rightarrow 0}f(\xi)=f(x)$$

由$\Phi'(x)=f(x)$知,$\Phi(x)$是$f(x)$的一个原函数,从而有如下推论.

推论 1 连续函数的原函数一定存在.

推论 2 设$\Phi(x)=\int_a^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$,$f(t)$在$[a,b]$上连续,$\varphi(x)$可微,且$a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$,则

$$\Phi'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

例 1 设$\Phi(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x t\sin t\mathrm{d}t$,求$\Phi'(x)$.

解 由定理1可得

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\frac{\pi}{2}}^x t\sin t\mathrm{d}t=x\sin x.$$

例 2 设$\Phi(x)=\int_x^1\sin t^2\mathrm{d}t$,求$\Phi'(x)$.

解 由定理1可得

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1\sin t^2\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x\sin t^2\mathrm{d}t=-\sin x^2.$$

例 3　设 $\Phi(x)=\int_0^{x^2}\ln t\mathrm{d}t(x>0)$，求 $\Phi'(x)$.

解　由推论 2，得

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\ln t\mathrm{d}t=\ln(x^2)(x^2)'=2x\ln(x^2).$$

例 4　设 $\Phi(x)=\int_{x^2}^{1}\frac{\sin\sqrt{\theta}}{\theta}\mathrm{d}\theta(x>0)$，求 $\Phi'(x)$.

解　由推论 2，得

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{1}\frac{\sin\sqrt{\theta}}{\theta}\mathrm{d}\theta=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1}^{x^2}\frac{\sin\sqrt{\theta}}{\theta}\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{\sin\sqrt{x^2}}{x^2}(x^2)'=-\frac{\sin x}{x^2}2x=-\frac{2\sin x}{x}.\end{aligned}$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t$.

解　当 $x\to0$ 时，此极限为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\ln\mathrm{e}=\frac{1}{2}.$$

二、牛顿-莱布尼茨公式

定理 2　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，又 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证　由定理 1 知，变上限积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，于是知

$\Phi(x)-F(x)=C_0$，C_0 为一常数，即

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C_0$$

现在来确定 C_0 的值，为此令 $x=a$，则有

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=F(a)+C_0,$$

即 $0=F(a)+C_0$，从而 $C_0=-F(a)$，因此有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$$

再令 $x=b$,得所求积分为

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$$

因此积分值与积分变量的记号无关,仍用 x 表示积分变量,即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

上式称为**牛顿-莱布尼茨公式**,也称为微积分基本公式.该公式可叙述为:定积分的值,等于其原函数在上、下限处值的差.

该公式把定积分与原函数这两个本来似乎并不相干的概念之间,建立起了定量关系,从而为定积分的计算找到了一条简捷途径.

为了计算方便,在计算时,常采用下面的格式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

例 6 求 $\int_0^2 x^2\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \dfrac{8}{3}$.

例 7 求 $\int_0^1 \dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= x\Big|_0^1 - \arctan x\Big|_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}.$$

例 8 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 9 求 $\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x$.

解 $$\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x$$

$$= \left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_1^2$$

$$= 1-\frac{1}{2}+2-2-\frac{1}{2}+1 = 1.$$

三、定积分的换元积分法

定理 3 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件:

(1)$\varphi(t)$ 在区间$[\alpha,\beta]$上有连续导数;

(2) 当 t 在区间$[\alpha,\beta]$上变动时,$x=\varphi(t)$ 的值在$[a,b]$上变化,且 $\varphi(\alpha)=a$,$\varphi(\beta)=b$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{6-3-1}$$

公式(6-3-1)称为**定积分的换元积分公式**.

证　设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,在公式(6-3-1)两边应用牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

可得

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)=\int_\alpha^\beta F'[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=$$
$$F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$$

注意

(1) 定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中的"$\mathrm{d}x$",本来是整个定积分记号中不可分割的一部分,但由上述定理可知,在一定条件下,它确实可以作为微分记号来对待. 也就是将$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中的 x 换成 $\varphi(t)$,则 $\mathrm{d}x$ 就换成 $\varphi'(t)\mathrm{d}t$,这正好是 $x=\varphi(t)$ 的微分.

(2) 用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量 t 时,积分限也要换成相应于新变量 t 的积分限.

(3) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $F(t)$ 后,不必像计算定积分那样再把 $F(t)$ 变换成 x 的函数,而只要把新变量 t 的上下限代入 $F(t)$ 中进行计算即可.

例 10　计算$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

解　设$\sqrt{1+x}=t$,则 $x=t^2-1$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

当 $x=0$ 时,$t=1$;$x=3$ 时,$t=2$.

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int_1^2(t^2-1)\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^2=\frac{8}{3}$$

例 11　计算$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$.

解　令 $x=a\sin t$,则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时,$t=0$;当 $x=a$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$. 则

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

换元公式也可反过来使用.为使用方便,把换元公式中左右两边对调位置,同时把 t 改记为 x,而 x 改记为 t,得

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$$

这样,可令 $t = \varphi(x)$ 来引入新变量 t,而 $\alpha = \varphi(a)$,$\beta = \varphi(b)$.从上式可以看出,此换元公式实质是凑微分的方法.

例 12 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x\mathrm{d}x$.

解 令 $t = \cos x$,则 $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$.当 $x = 0$ 时,$t = 1$;当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时,$t = 0$.则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\mathrm{d}x = -\int_1^0 t^3\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

在例 12 中,可以不明显地写出新变量 t,这时上下限不变,计算过程如下:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\mathrm{d}\cos x = -\left[\frac{\cos^4 x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

例 13 函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续,证明:

(1) $f(x)$ 为奇函数,则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(2) $f(x)$ 为偶函数,则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

证

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

在 $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$ 中,令 $x = -t$,则

$$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$

从而

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x$$

(1) $f(x)$ 为奇函数,有 $f(-x) + f(x) = 0$,所以

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

(2) $f(x)$ 为偶函数,有 $f(-x) + f(x) = 2f(x)$,所以

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

该题的几何意义是明显的,如图 6-3-3 和图 6-3-4 所示.

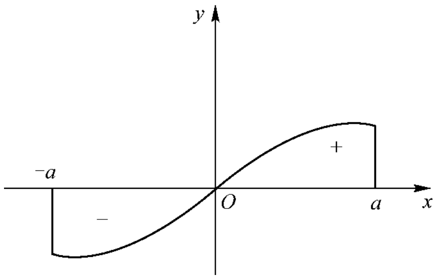


图 6-3-3

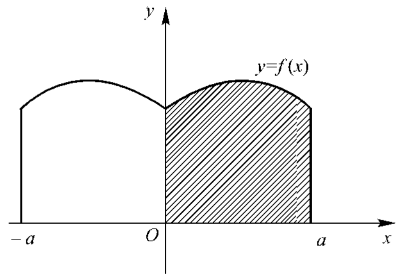


图 6-3-4

在求对称区间上的定积分时，要特别注意被积函数的奇偶性，利用上题的结论可以简化定积分的计算.

例 14　计算 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

因为$\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$是偶函数，$\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}$是奇函数，所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x&=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\int_{0}^{1}\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}\mathrm{d}x\\&=4\int_{0}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=4-4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=4-\pi\end{aligned}$$

四、定积分的分部积分法

由不定积分的分部积分法以及牛顿－莱布尼茨公式可以得到定积分的分部积分公式

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=\int_a^b(uv)'\mathrm{d}x-\int_a^b u'v\mathrm{d}x=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x$$

即
$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x \tag{6-3-2}$$

或
$$\int_a^b u\mathrm{d}v=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u \tag{6-3-3}$$

这就是定积分的分部积分公式. 公式(6-3-2)、公式(6-3-3)表明定积分的分部积分公式适用的范围，就被积函数而言，与不定积分的分部积分相似，u，$\mathrm{d}v$的选择也类似，只不过原函数已经积出的部分需用积分上、下限代入.

例 15　计算$\int_0^1\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解 令$\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,且 $x=0$ 时 $t=0$;$x=1$ 时,$t=1$.

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t\cos t\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\mathrm{d}\sin t = 2t\sin t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \sin t\mathrm{d}t =$$

$$2\sin 1 + 2\cos t\Big|_0^1 = 2\sin 1 + 2\cos 1 - 2$$

例 16 计算$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -\left(x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right) = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$

例 17 证明:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数} \\ \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times 1, & n\text{ 为大于 1 的正奇数} \end{cases}$$

证 令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$,则

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$$

下面计算 I_n.

$$\begin{aligned} I_n &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x = -\left([\sin^{n-1}x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}\sin^{n-1}x\right) \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x = (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x\right) \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

得到 I_n 的递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n\geqslant 2, n\in\mathbf{N})$$

连续使用递推公式,直到 I_1 或 I_0,得

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\cdots\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}I_0$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\cdots\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}I_1$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x = 1$$

因此

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数} \\ \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times 1, & n\text{ 为大于 1 的正奇数} \end{cases}$$

*第四节　广义积分

前面我们所讨论的定积分，是限定在有限区间上的有界函数，所以这种定积分称为**常义积分**. 但在实际问题中，常常要突破这两个限制，这就要求我们把常义积分概念从这两个方面加以推广，形成了**广义积分**，又称**反常积分**.

一、无穷区间上的广义积分

定义 1　设函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，我们把极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上的广义积分，记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若极限存在，称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；若极限不存在，则称该广义积分发散.

类似地，可定义 $f(x)$ 在$(-\infty,b]$ 上的广义积分，记为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

其中 c 为任意实数，当右端两个广义积分都收敛时，广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 才是收敛的，否则此广义积分是发散的.

例 1　求 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

解　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1.$

为了书写方便，实际运算中常常省去极限记号，而形式地把“∞”当成一个数，直接利用牛顿 - 莱布尼茨公式的计算公式来计算：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a);$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty);$$

我们应当把公式中出现的 $F(\pm\infty)$ 理解为极限运算，即 $F(\pm\infty)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}F(x)$，其中 $F'(x)=f(x)$.

例 2 求 $\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}(-x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{2}$.

例 3 求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\arctan x\Big|_{-\infty}^{0}+\arctan x\Big|_{0}^{+\infty}=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例 4 讨论 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 (1) 当 $p=1$ 时，有

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_{1}^{+\infty}=+\infty,$$

故当 $p=1$ 时，此广义积分发散.

(2) 当 $p<1$ 时，有

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}\cdot x^{1-p}\Big|_{1}^{+\infty}=+\infty,$$

故当 $p<1$ 时，此广义积分发散.

(3) 当 $p>1$ 时，有

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}\cdot x^{1-p}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{p-1},$$

故当 $p>1$ 时，此广义积分收敛.

综合(1)、(2)、(3) 可知，广义积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

二、被积函数有无穷间断点的广义积分

定义 2 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$，取 $\xi>0$，称极限 $\lim\limits_{\xi\to 0^+}\int_{a+\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的广义积分，记为

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to 0^+}\int_{a+\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

若该极限存在，则称此广义积分收敛；若极限不存在，则称其发散.

类似地，当 $x=b$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点时，即 $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\infty$，$f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的广义积分定义为：取 $\xi>0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\xi\to 0^+}\int_a^{b-\xi}f(x)\mathrm{d}x$.

当无穷间断点 $x=c$ 位于区间 $[a,b)$ 内部时，则定义广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to 0^+}\int_a^{c-\xi}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\xi}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

上式右端两个积分均为广义积分，仅当这两个广义积分都收敛时，才称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的，否则称其是发散的.

上述无界函数的广义积分也称为**瑕积分**，无穷间断点称为**瑕点**.

例 5　求 $\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x(a>0)$.

解　$x=a$ 为被积函数的无穷间断点(又称瑕点)，于是

$$\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to 0^+}\int_0^{a-\xi}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to 0^+}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a-\xi}$$

$$=\lim_{\xi\to 0^+}\arcsin\frac{a-\xi}{a}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

例 6　求 $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$.

解　下限 $x=0$ 是被积函数的瑕点，于是

$$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to 0^+}\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to 0^+}\left(x\ln x\Big|_\xi^1-\int_\xi^1\mathrm{d}x\right)$$

$$=\lim_{\xi\to 0^+}(-\xi\ln\xi-1+\xi)=-1.$$

例 7　讨论 $\int_0^2\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　在 $[0,2]$ 的内部有被积函数的瑕点 $x=1$，于是

$$\int_0^2\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\xi_1\to 0^+}\int_0^{1-\xi_1}\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x+\lim_{\xi_2\to 0^+}\int_{1+\xi_2}^2\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\xi_1\to 0^+}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\Bigg|_0^{1-\xi_1}+\lim_{\xi_2\to 0^+}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\Bigg|_{1+\xi_2}^2,$$

后面两个极限不存在，所以 $\int_0^2\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$ 发散.

第五节　定积分的应用

前几节我们讨论了定积分的概念及计算方法，在此基础上进一步来研究它的应用. 定积分是一种实用性很强的数学方法，在科学技术问题中有着广泛的应用，本节主要介绍它在几何方面的一些应用，重点注意掌握用微元法将实际问题表示成定积分的分析方法.

一、定积分应用的微元法

定积分应用的微元法又称元素法. 为了说明这个方法，我们先回顾一下应用定积分概念解决实际问题的四个步骤，以求曲边梯形的面积 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为例：

第一节　将所求整体量 A 分为部分量，即 $\Delta A_i(i=1,2,\cdots,n)$；

第二步　求出每个部分量的近似值，$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$；

第三步　写出所求整体量的近似值，$A\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$；

第四步　取 $\lambda=\max\{\Delta x_i\}\to 0$ 时的极限，则得 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

在这四个步骤中，关键的是第二步，这一步是确定 ΔA_i 的近似值. 有了它再求和、取极限，从而求得 A 的精确值. 而第三、四两步可以合并成一步，就是在区间 $[a,b]$ 上无限累加，即在 $[a,b]$ 上积分. 至于第一步它只是指明所求量具有可加性，这是 A 能用定积分计算的前提，于是，上述四步就简化成了如下两步：

(1) 在区间 $[a,b]$ 上任取一微小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，然后写出在这个小区间上的部分量 ΔA 的近似值，记为 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$（称为 A 的**微元**或**元素**）；

(2) 将微元 $\mathrm{d}A$ 在 $[a,b]$ 上无限累加（即积分），就可以得到 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

使用上述两步解决问题的方法称为**微元法**（元素法）.

关于微元 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$，特作如下说明：

(1) $f(x)\mathrm{d}x$ 作为 ΔA 的近似表达式，应该足够准确，确切地说，就是要求其差是关于 Δx 的高阶无穷小，即 $\Delta A-f(x)\mathrm{d}x=o(\Delta x)$. 这样我们就知道，称作微元的量 $f(x)\mathrm{d}x$，实际是所求量的微分 $\mathrm{d}A$.

(2) 具体怎样求微元呢?这是问题的关键，这要分析问题的实际意义及数量关系，一般按照在局部 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上，以“常代变”“匀代不匀”“直代曲”的思路，写出局部上所求量的近似值，即微元 $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$.

二、定积分在几何上的应用

1. 平面图形的面积

设平面图形是由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 和直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 围成. 在 $[a,b]$ 上 $g(x)\leqslant f(x)$，如图 6-5-1 所示.

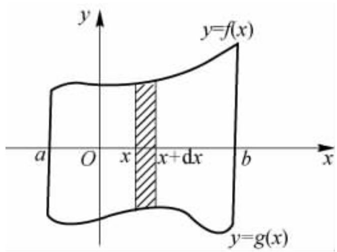


图 6-5-1

取 x 为积分变量，其变化区间为 $[a,b]$，在 $[a,b]$ 上任取代表区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，该区间上面积微元 $\mathrm{d}A$ 近似等于高为 $f(x)-g(x)$，底为 $\mathrm{d}x$ 的矩形面积，即

$$\mathrm{d}A=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$

以面积微元为被积表达式，在 $[a,b]$ 上做定积分得所求面积

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x \tag{6-5-1}$$

同理，如果平面图形是由曲线 $x=\varphi(y)$，$x=\psi(y)$ 和直线 $y=c$，$y=d(c<d)$ 围成，并且在 $[c,d]$ 上 $\varphi(y)\geqslant\psi(y)$，如图6-5-2 所示，那么这平面图形的面积为

$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y \tag{6-5-2}$$

例 1　求 $x=0$，$x=1$，$y=\mathrm{e}^x$ 及 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 所围成图形的面积.

解　所围图形如图 6-5-3 所示，由式(6-5-1) 可得所求面积为

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2$$

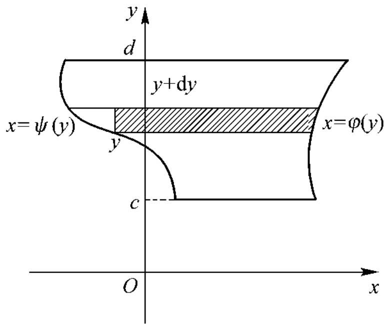


图 6-5-2

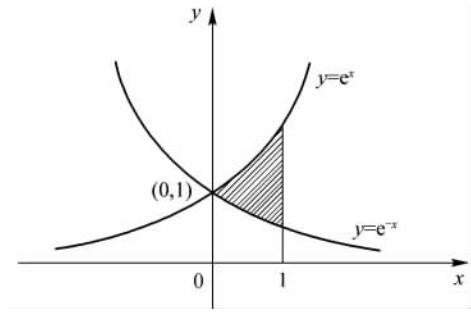


图 6-5-3

例 2　求曲线 $y=\ln x, x=2$ 及 x 轴围成的平面图形的面积.

解　所围图形如图 6-5-4 所示，如选择 x 为积分变量，它的变化区间为$[1,2]$，则所求面积

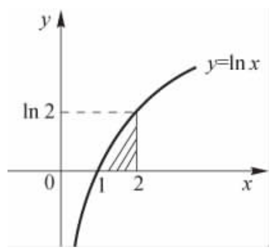


图 6-5-4

$$A=\int_1^2 \ln x \mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x \mathrm{d}\ln x = 2\ln 2 - 1$$

如选择 y 为积分变量，它的变化区间为$[0,\ln 2]$，则所求面积

$$A=\int_0^{\ln 2}(2-\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = (2y-\mathrm{e}^y)\Big|_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 1$$

例 3　计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积.

解　所围图形如图 6-5-5 所示. 为了画出图形所在范围，先求所给抛物线和直线交点. 解方程组得交点$(2,-2)$，$(8,4)$. 取 y 为积分变量，由式(6-5-2)可得

$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y = \left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{4} = 18$$

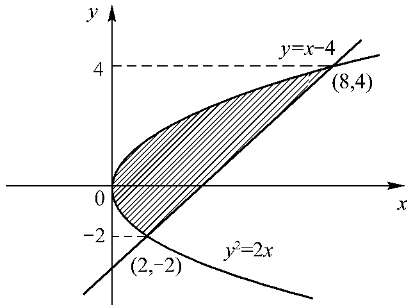


图 6-5-5

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

注意　此题若选 x 为积分变量,必须过点(2,−2)作直线 $x=2$,将图形分成两部分,分别应用公式(6-5-1),可得

$$A = \int_0^2 [\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})]\mathrm{d}x + \int_2^8 [\sqrt{2x} - (x-4)]\mathrm{d}x = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18$$

显然,这样的计算量比较大,因此要注意积分变量的恰当选择.

2. 体积

1）平行截面为已知的立体的体积

设有一立体如图 6-5-6 所示,取定轴为 x,并设该立体在过点 $x=a$,$x=b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间,以 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积.假定 $A(x)$ 为$[a,b]$上的连续函数,此时利用微元法可求得体积公式.

取 x 为积分变量,$[a,b]$为积分区间,在$[a,b]$上取代表区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,相应薄片的体积近似于底面积为 $A(x)$,高为 $\mathrm{d}x$ 的柱体体积,即体积微元

$$\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x$$

从而所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x \tag{6-5-3}$$

例 4　一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心,并与底面交成 α 角,如图 6-5-7 所示.计算该平面截圆柱体所得立体的体积.

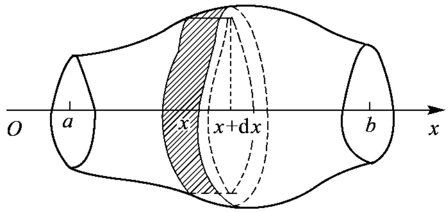


图 6-5-6

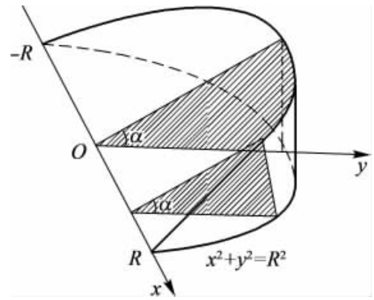


图 6-5-7

解 取这个平面与圆柱体的底面交线为 x 轴，底面上过圆心且垂直于 x 轴的直线为 y 轴，则底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$. 立体中过 x 轴上的点且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形，它的两条直角边长度分别为 y 及 $y\tan\alpha$，因此截面面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$$

由公式(6-5-3)得

$$V=\int_{-R}^{+R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\alpha\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{+R}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

2)、 体的体积

一个平面图形绕着它所在平面内的一条直线、 一周所成的立体称为**旋转体**，这条直线称为**旋转轴**. 常见的、 体有圆柱体、圆锥体、球体等.

上述、 体都可看作由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴、 一周而成，如图 6-5-8 所示. 现用微元法计算它的体积.

取横坐标 x 为积分变量，变化区间为 $[a,b]$，在 $[a,b]$ 上取代表区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，相应薄片的体积近似于底面积为 $\pi f^2(x)$，高为 $\mathrm{d}x$ 的圆柱体的体积，即体积微元

$$\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

从而所求、 体体积为

$$V=\int_a^b\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x \tag{6-5-4}$$

同理，由连续曲线 $x=\varphi(y)$，与直线 $y=c$，$y=d$ 及 y 轴围成的曲边梯形绕 y 轴、 一周而成的、 体体积(如图 6-5-9 所示)

$$V=\int_c^d\pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y \tag{6-5-5}$$

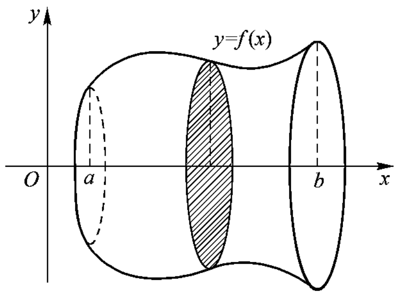


图 6-5-8

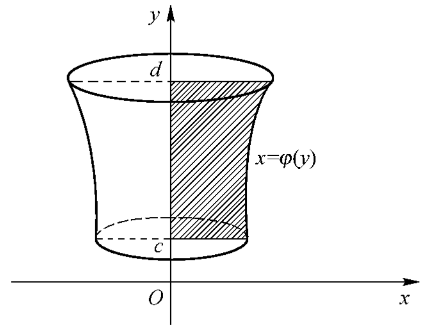


图 6-5-9

例 5　求由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$围成的图形绕 x 轴、　而成的、　体体积.

解　、　体如图 6-5-10 所示，可看作由上半椭圆 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 及 x 轴所围成图形绕 x 轴、　一周而成的立体.

由公式(6-5-4)，得

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

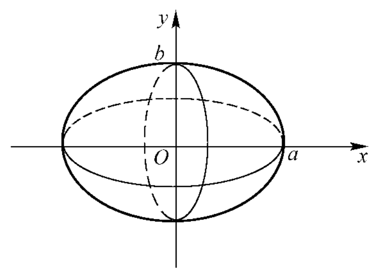


图 6-5-10

注意　当 $a=b$ 时，旋转体是半径为 a 的球体，体积公式为大家所熟悉的$\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

* 3. 平面曲线的弧长

设函数 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上有一阶连续的导数，在$[a,b]$上取代表区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，其上一段弧$\overset{\frown}{MN}$的长度Δs可以用函数$f(x)$在$[x,x+\mathrm{d}x]$上的弧微分近似表示（如图 6-5-11 所示），即弧微元

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$$

所以

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x \tag{6-5-6}$$

若曲线弧由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$给出，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数，则弧微元

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

所以

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{6-5-7}$$

若曲线弧由极坐标方程 $r = r(\theta)(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 给出，$r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数. 由$x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta$,不难验证弧微元为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

所以

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \tag{6-5-8}$$

例 6 求阿基米德螺线 $r = a\theta(a > 0)$ 上相应于 θ 从 0 到 2π(如图 6-5-12 所示)的弧长.

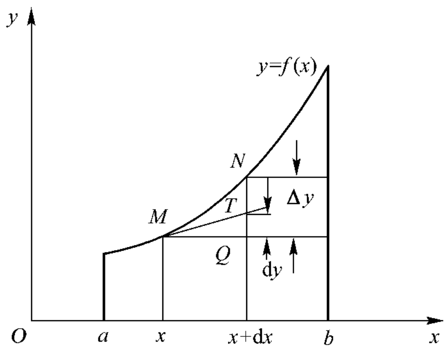


图 6-5-11

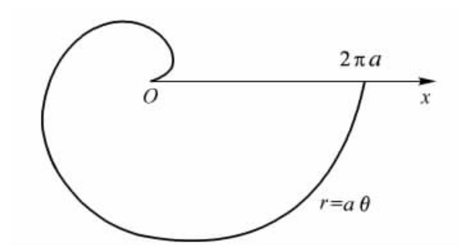


图 6-5-12

解 弧微元为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,\mathrm{d}\theta = a\sqrt{1 + \theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

于是所求弧长为

$$s = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\,\mathrm{d}\theta == \frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})]$$

* 三、定积分在物理上的应用

1. 变力沿直线所做的功

由物理学知道，物体在常力 F 的作用下沿力的方向做直线运动，当物体的位移为 s 时，力 F 所做的功为

$$W = F \cdot s.$$

如果物体在变力 $F(x)$ 的作用下，沿 x 轴由 a 处移动到 b 处，如何来求变力 $F(x)$ 所做的功呢?

由于力 $F(x)$ 是变力(如图 6-5-13 所示),所求功是区间$[a,b]$上非均匀分布的整体量,因此可用定积分来解决.

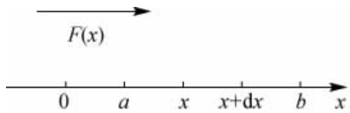


图 6-5-13

在区间$[a,b]$上任取一个微小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,在这个微小区间上,视变力 $F(x)$ 为常力,按常力做功公式可得在这一段上变力做功的近似值,即功的微元为

$$\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$$

将微元 $\mathrm{d}W$ 从 a 到 b 求定积分,就得到整个区间上所做的功为

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

例 1　在原点 O 有一个带电量为 $+q$ 的点电荷,它所产生的电场对周围电荷有作用力.现有一单位正电荷从距原点 a 处沿射线方向移至距原点为 $b(a<b)$ 的地方,求电场力所做的功.又如果把该单位电荷移至无穷远处,电场力做了多少功?

解　取电荷移动的射线方向为 x 轴正向,ī　电场力为 $F=k\dfrac{q}{x^2}$(k 为常数),这是一个变力,我们在$[a,b]$上任取一个微小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,在这个微小区间上"以常代变",可得功的微元为

$$\mathrm{d}W=\frac{kq}{x^2}\mathrm{d}x,$$

于是所求功为

$$W=\int_a^b\frac{kq}{x^2}\mathrm{d}x=kq\left(-\frac{1}{x}\right)\bigg|_a^b=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

若移至无穷远处,则所做的功为

$$\int_a^{+\infty}kq\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-kq\frac{1}{x}\bigg|_a^{+\infty}=\frac{kq}{a}.$$

在物理学中,把上述移至无穷远处所做的功称为电场在 a 处的电位,于是知电场在 a 处电位为 $V=\dfrac{kq}{a}$.

例 2　一圆柱形的蓄水桶高为 5 m,底圆半径为 3 m,桶内盛满了水,问要把桶内的水全部吸出需做多少功?

解　如图 6-5-14 所示,建立平面直角坐标系,取深度 x 为积分变量,它的变化区间为$[0,5]$,在这个区间上任取一个微小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,这一薄层水的高度为

$\mathrm{d}x$，重力为 $9.8\times10^3\times\pi\times3^2\mathrm{d}x$. 将其抽出水桶需提升的距离可近似地等于 x，因而所做的功(即所求功的微元)为

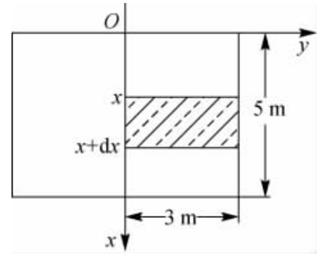


图 6-5-14

$$\mathrm{d}W = 9.8\times10^3\times\pi\times3^2\cdot x\mathrm{d}x = 88.2\times10^3\pi x\mathrm{d}x.$$

于是所求的功为

$$W = \int_0^5 88.2\times10^3\pi x\mathrm{d}x = 88.2\times10^3\pi x\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^5 \approx 3.462\times10^6(\mathrm{J}).$$

答：要把桶内的水全部吸出需做功约 3.462×10^6 J.

2. 液体对平面薄板的压力

由物理学可知，在水深为 h 处的压强为 $P=\rho gh$，这里 ρ 是水的密度，g 是重力加速度. 如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处，那么平板一侧所受的水压力为

$$F = PA = \rho ghA.$$

设有一薄板，垂直放在密度为 ρ 的液体中，由于薄板上在不同深处的压强是不同的，因此整个薄板所受的压力是非均匀分布的整体量，不能用前面的公式来计算液体压力. ī ，应当如何求液体对薄板的压力呢？下面我们结合具体例子说明怎样用定积分来计算它.

例 3 一个横放着的圆柱形水桶，桶内盛有半桶水，设桶的底半径为 R，水的密度为 ρ，试计算桶的一个端面上所受的压力.

解 建立如图 6-5-15 所示的坐标系，显然，半圆 ACB 的方程为 $x^2+y^2=R^2, x\in[0,R]$.

取 x 为积分变量，其变化区间为 $[0,R]$，在这个变化区间上任取一个微小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，则半圆板上相应于微小区间的窄条上各点处的压强近似于 ρgx，窄条面积近似于 $2\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$，故压力微元为

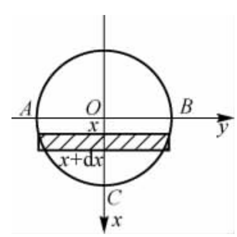


图 6-5-15

$$\mathrm{d}F = 2\rho gx\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$$

于是所求压力为

$$F = \int_0^R 2\rho gx\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x = -\rho g\int_0^R (R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(R^2-x^2)$$

$$=-\frac{2}{3}\rho g(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R=\frac{2}{3}\rho gR^3.$$

答：桶的一个端面上所受的压力为$\frac{2}{3}\rho gR^3$.

例 4　某水库的水闸为直角梯形，上底为 6 m，下底为 3 m，高为 9 m，当水面与上底相齐时，求水闸所受的压力.

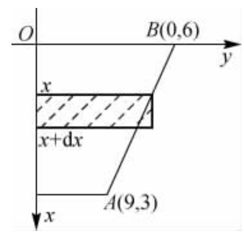


图 6-5-16

解　建立如图 6-5-16 所示的坐标系. 此时直线 AB 的方程为

$$y=6-\frac{1}{3}x$$

取 x 为积分变量，其变化区间为$[0,9]$，在这一变化区间上任取一个微小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，相应于该小区间的小窄条所受压力(压力微元)为

$$\mathrm{d}F=\rho gx\cdot\left(6-\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x,$$

于是，水闸所受的压力为

$$F=\int_0^9\rho gx\cdot\left(6-\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x=\rho g\int_0^9\left(6-\frac{1}{3}x^2\right)\mathrm{d}x$$
$$=\rho g\left(3x^2-\frac{1}{9}x^3\right)\Big|_0^9=9.8\times10^3\times162$$
$$=1.5876\times10^6(\mathrm{N}).$$

答：水闸所受的压力为 $=1.5876\times10^6$ N.

3. 求转动惯量

在刚体力学中，转动惯量是一个重要的物理量，若质点质量为 m，到一轴距离为 r，则该质点绕轴的转动惯量为 $I=mr^2$.

现在Ж　质量连续分布的物体绕轴的转动惯量问题，一般地，如果物体形状对称，并且质量为均匀分布时，则可以用定积分来解决.

例 5　一均匀细杆长为 l，质量为 m，试计算细杆绕过它的中点且垂直于杆的轴的转动惯量.

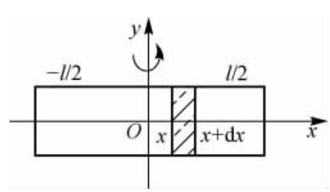


图 6-5-17

解　建立如图 6-5-17 所示的坐标系，在细杆上取微小的一段$[x,x+\mathrm{d}x]$，它的质量为 $\frac{m}{l}\mathrm{d}x$，把这一小段杆看作是位于 x 处的一个质

点，它到转动轴的距离为 $|x|$，于是得转动惯量的微元为

$$\mathrm{d}I=\frac{m}{l}x^2\mathrm{d}x,$$

沿细杆从 $-l/2$ 到 $l/2$ 积分，得整个细杆的转动惯量为

$$I=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{m}{l}x^2\mathrm{d}x=\frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2}=\frac{1}{12}ml^2.$$

例 6 计算质量为 m，半径为 R 的均匀薄板，绕过圆心与圆板垂直的轴的转动惯量.

解 建立如图 6-5-18 所示的坐标系.

在区间 $[0,R]$ 上的 x 处取一微小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，得到一个宽为 $\mathrm{d}x$ 的小窄圆环，因圆板的密度为 $\frac{m}{\pi R^2}$，圆环面积近似于 $2\pi x\mathrm{d}x$，故其质量近似于

$$\frac{m}{\pi R^2}2\pi x\mathrm{d}x=\frac{2m}{R^2}x\mathrm{d}x.$$

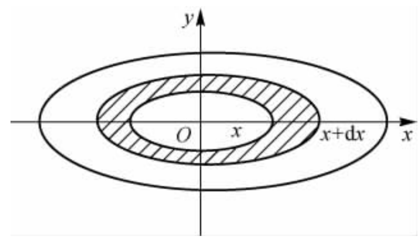


图 6-5-18

圆环对轴转动惯量的近似值，即转动惯量的微元为

$$\mathrm{d}I=\left(\frac{2m}{R^2}x\mathrm{d}x\right)x^2=\frac{2m}{R^2}x^3\mathrm{d}x.$$

沿 x 轴方向，从 0 到 R 积分，得到圆板的转动惯量为

$$I=\int_0^R\frac{2m}{R^2}x^3\mathrm{d}x=\frac{2m}{R^2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^R=\frac{1}{2}mR^2.$$

4. 求平均值

我们先来讨论如何利用定积分求连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值 $\bar{y}$.

将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份，设分点为 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，每个小区间的长度为 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$，在这些分点处 $f(x)$ 的函数值依次为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，可用它们的算术平均值

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

来近似表达函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上所取得一切值的平均值 $\bar{y}$. 若 n 取得比较大，即 Δx_i 较小时，就能比较确切地表达函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上所取得一切值的平均值. 因此，我们称极限

$$\bar{y}=\lim_{x\to+\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

为函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上平均值，于是

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{b-a}\cdot\Delta x_i\\&=\frac{1}{b-a}\lim_{x\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}y_i\Delta x_i\\&=\frac{1}{b-a}\lim_{x\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i\end{aligned}$$

由定积分的定义得

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 7　求从 0 到 T 这段时间内自由落体运动的平均速度.

解　因为自由落体运动的速度 $v=gt$，所以

$$\bar{v}=\frac{1}{T-0}\int_0^T gt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\Big|_0^T=\frac{1}{2}gT.$$

例 8　求纯电阻电路中正弦电流 $i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ 在一个周期上的平均功率(其中 I_{m} 及 ω 均为常数).

解　设电阻为 R(R 为常数)，则电路中的电压为

$$u=iR=RI_{\mathrm{m}}\sin\omega t,$$

而功率为

$$p=iu=R(I_{\mathrm{m}}\sin\omega t)^2,$$

因此，p 在$\left[0,\frac{2\pi}{\omega}\right]$上的平均功率(功率的平均值)为

$$\begin{aligned}\bar{p}&=\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}-0}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}RI_{\mathrm{m}}^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\omega RI_{\mathrm{m}}^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{I_{\mathrm{m}}^2R}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(1-\cos 2\omega t)\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{1}{2}I_{\mathrm{m}}^2R=\frac{1}{2}I_{\mathrm{m}}U_{\mathrm{m}}(U_{\mathrm{m}}=I_{\mathrm{m}}R).\end{aligned}$$

这说明纯电阻电路中正弦电流的平均功率等于电流、电压峰值之积的一半.

对一般的周期为 T 的交变电流 $i(t)$，它在 R 上消耗的功率为 $p = u(t)i(t) = i^2(t)R$，在 $[0,T]$ 上的平均功率为 $\bar{p} = \dfrac{\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t}{T}$.

通常交流电器上标明的功率就是平均功率.

第六节　二重积分的概念与性质

一、二重积分的概念

为了引入二重积分的概念，我们先来讨论下面一个典型的实际问题.

1. 曲顶柱体的体积

设二元函数 $z = f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上是非负且连续的. 以曲面 $z = f(x,y)$ 为顶，以 xOy 面上的有界闭区域 D 为底，以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面的侧面的立体，称为**曲顶柱体**(如图 6-6-1 所示).

对于曲顶柱体的体积 V 的计算，可以借鉴研究曲边梯形面积时的做法，将曲顶柱体分成若干个小的曲顶柱体来计算.

具体步骤如下：

1) 分割

将区域 D 任意分割成 n 个小区域 ΔD_1，ΔD_2，…，ΔD_n，其面积分别为 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$，这时，曲顶柱体也相应地被分成 n 个小曲顶柱体. 假设第 i 个小曲顶柱体的体积为 $\Delta V_i (i = 1,2,\cdots,n)$，则

$$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

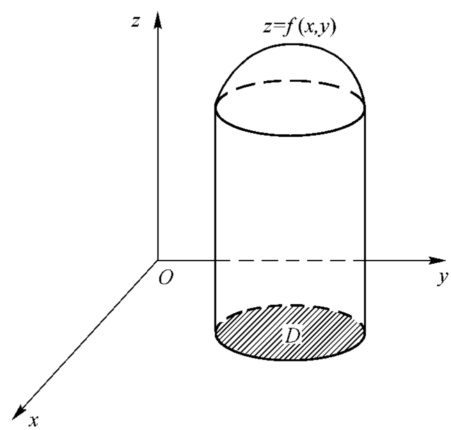


图 6-6-1

2) 近似

在每一个小区域 $\Delta D_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 中，任意取一点 (ξ_i,η_i)，以 $f(\xi_i,\eta_i)$ 为高，以 ΔD_i 为底作平顶柱体(如图 6-6-2 所示)，则这些平顶柱体的体积为

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

用小平顶柱体的体积近似代替小曲顶柱体的体积，即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

3）求和

记 λ_i 为 ΔD_i 的直径（λ_i 表示 ΔD_i 中任意两点间距离的最大值），设 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}$，它表示所有小区域中最大直径．于是得到整个曲顶柱体体积的近似值，即

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

4）取极限

当 λ 趋于零时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 的极限若存在，则其极限值为曲顶柱体的体积 V，即

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

综上可知，求曲顶柱体的体积问题，可以归结为求和式的极限问题．

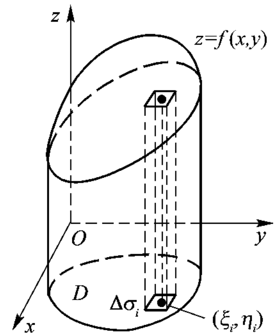


图 6-6-2

2. 二重积分的定义

从上例中可以抽象出二重积分的定义.

定义　设二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有定义，将区域 D 任意分割成 n 个小区域

$$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$$

其面积分别为

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

在每个 $\Delta D_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i, i = 1, 2, \cdots, n$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果当 n 个小区域的直径中最大值 λ 趋于零时，和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的**二重积分**，记作 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $f(x, y)$ 称为**被积函数**，$f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 称为**被积表达式**，$\mathrm{d}\sigma$ 称为**面积元素**，x 与 y 称为**积分变量**，D 称为**积分区域**，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 称为**积分和**.

与定积分类似，若函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分存在. 今后如果没有特别声明，我们总假定被积函数 $f(x, y)$ 在积分区域上是连续的.

二重积分作为一个和式的极限，这一极限值只与被积函数和积分区域有关，而与分割区域的方法无关，这样可以用一组平行于坐标轴的直线来划分区域 D，ī 除了靠近边界曲线的一些小区域之外，绝大多数的小区域都是矩形，因此，可以将 $\mathrm{d}\sigma$ 记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（并称 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为直角坐标系下的面积元素），二重积分也可表示为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

根据二重积分的定义，当 $f(x,y)\geqslant 0,(x,y)\in D$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上表示以 $z=f(x,y)$ 为顶，以 D 为底的曲顶柱体的体积，即

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

这就是二重积分的几何意义. 特别地，如果 $f(x,y)\equiv 1$，且 D 的面积为 σ，ī $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\sigma$. 这时可以理解为以平面 $z=1$ 为顶，D 为底的平顶柱体的体积，该体积在数值上就等于柱体的底面积.

如果当 $f(x,y)<0,(x,y)\in D$ 时，ī 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上表示以 $z=f(x,y)$ 为顶，以 D 为底的曲顶柱体的体积的负值，即

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

如果 $f(x,y)$ 在 D 的若干部分区域上是正的，而在其他的部分区域上是负的，我们可以把 xOy 面上方的柱体体积取成正，xOy 下方的柱体体积取成负，ī $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上就表示曲顶柱体体积的代数和.

思考 二重积分的几何意义是什么？

二、二重积分的性质

二重积分具有与定积分类似的性质.

性质 1 被积函数的常数因子可以提到二重积分号的外面，即

$$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma(k\text{ 为常数}).$$

性质 2 函数代数和的二重积分等于各个函数的二重积分的代数和，即

$$\iint\limits_D[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 3 如果有界闭区域 D 被分割成两个有界闭区域 D_1 和 D_2，则在 D 上的二

重积分等于在 D_1 和 D_2 上的二重积分之和，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 4 如果在 D 上，$f(x,y) \leqslant \varphi(x,y)$，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_{D_1} \varphi(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 5 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$

性质 6 设 M，m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 是 D 的面积，则有

$$m\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma.$$

例 试估计二重积分 $\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 D 是矩形闭区域，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 2$.

解 因为二元函数 $f(x,y) = x+y+1$ 在闭区域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ 上的最大值为 $f(1,2) = 4$，最小值为 $f(0,0) = 1$，而 D 的面积 $\sigma = 2$. 所以有

$$2f(0,0) \leqslant \iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma \leqslant f(1,2)\cdot 2$$

即

$$2 \leqslant \iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma \leqslant 8.$$

性质 7（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η) 使得下式成立

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$$

证 由于有界闭区域 D 的面积 $\sigma \neq 0$，所以可把性质 6 中不等式各除以 σ，有

$$m \leqslant \frac{1}{\sigma}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M.$$

这就是说，确定的数值 $\frac{1}{\sigma}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 是介于二元函数 $f(x,y)$ 的最大值 M 与最小值 m 之间的. 根据在闭区域上连续函数的介值定理，在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得函数在该点的值与这个确定的值相等，即

$$\frac{1}{\sigma}\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta).$$

上式两端各乘以 σ,就得所要证明的公式.

第七节　二重积分在直角坐标系中的计算

根据二重积分的几何意义,通过计算曲顶柱体的体积,可以导出将二重积分化为二次积分的计算公式.

在直角坐标系中,设积分区域 D 是由两条平行直线 $x=a,x=b$ 与两条曲线 $y=\varphi_1(x),y=\varphi_2(x)$ 所围成的,区域 D 如图 6-7-1 所示,可表示为

$$D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$$

也可以用下面不等式表示为

$$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b$$

现在来计算 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$. 假定 $f(x,y)\geqslant 0$,按照二重积分的几何意义,$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值等于以 D 为底,以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体(如图 6-7-2 所示)的体积. 该体积可以用定积分中计算"平行截面面积为已知的立体的体积"的方法来计算.

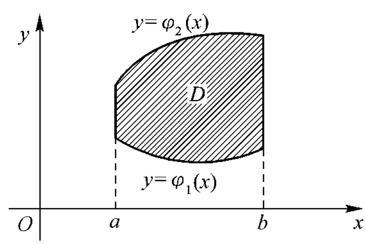


图 6-7-1

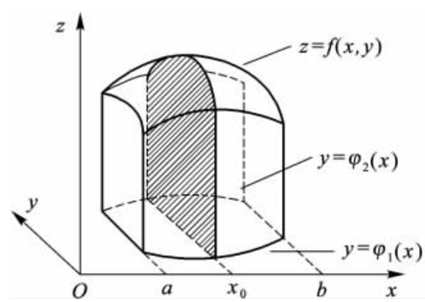


图 6-7-2

作平行于 yOz 面的平面 $x=x_0,x_0\in[a,b]$,它与曲顶柱体相交所得截面是以区间 $[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$ 为底,$z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形(如图 6-7-2 中阴影部分). 用 $A(x_0)$ 表示截面的面积,即

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\mathrm{d}y$$

由于 x_0 的任意性,过区间 $[a,b]$ 上任意一点 x,且平行于 yOz 面的平面,与曲顶柱体相交所得截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

再根据平行截面面积为已知的立体体积的定积分公式，求得曲顶柱体体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

这个体积也就是所求二重积分的值，从而有等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

该式右端的积分称为先对 y，后对 x 的二次积分. 其计算方法是先把 x 看作常数，只把 $f(x,y)$ 看作 y 的函数，并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分，然后把计算的结果(是关于 x 的函数) 再对 x 计算在区间$[a,b]$上的定积分，记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

这就是把二重积分化为先对 y，后对 x 的二次积分的公式.

上述讨论中，我们先假定了 $f(x,y)\geqslant 0$，实际上，上述公式的成立并不受此条件的限制.

同理，在直角坐标系中，如果积分区域 D 是由两条平行直线 $y=c$，$y=d$ 与两条曲线 $x=\psi_1(x)$，$x=\psi_2(x)$ 所围成的，区域 D 如图 6-7-3 所示，用不等式表示为

$$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y),\quad c\leqslant y\leqslant d$$

那么有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

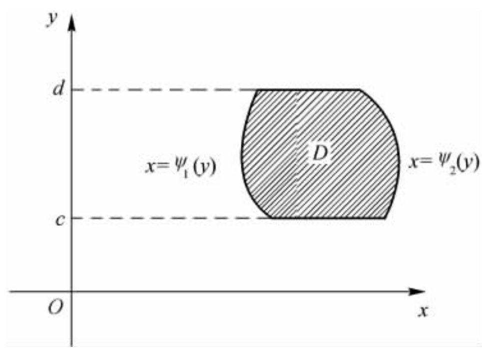


图 6-7-3

这就是把二重积分化为先对 x 后对 y 的二次积分的公式.

为了讨论问题的方便，今后把如图 6-7-1 与图 6-7-3 所示的区域，分别称为 $X-$型积分区域与 $Y-$型积分区域. 从两个图形中可以看出，$X-$型积分区域的几何特征是，任何穿过积分区域 D 的内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界恰好有两个交点. $Y-$型积分区域的几何特征是，任何穿过积分区域 D 的内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界恰好有两个交点.

在计算二重积分时，关键是确定积分区域 D 的不等式表达，步骤如下：

(1) 画出积分区域 D 的图形.

(2) 判断积分区域是 $X-$型积分区域还是 $Y-$型积分区域. 如果积分区域是 $X-$型的(或 $Y-$型的)，作平行于 y 轴(或 x 轴) 的直线与区域相交，沿着 y 轴(或 x

轴）的正向看，所作的直线与区域D先相交的边界曲线$y=\varphi_1(x)$（或$x=\psi_1(y)$），称之为穿入曲线，作为积分下限．该直线离开区域D的边界线$y=\varphi_2(x)$（或$x=\psi_2(y)$），称之为穿出曲线，作为积分上限．而后对x（或y）积分时，其积分区间为区域D在Ox轴（或Oy轴）上投影区间$[a,b]$（或$[c,d]$），a（或c）是下限，b（或d）是上限，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\left(\text{或} \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)$$

（3）如果积分区域D既是X－型的又是Y－型的，那么有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

这表明二次积分可以交换积分次序，但在交换积分次序时，必须先画出积分区域的图形，然后重新确定积分上下限．

（4）如果所作的平行于x轴或y轴的直线与区域D相交时，在不同的范围内，穿入曲线或穿出曲线不同，ī　应该用平行于x轴或y轴的直线将区域D分成几部分，使每个部分都是X－型积分区域或Y－型积分区域（如图6-7-4所示），根据二重积分对于积分区域具有可加性可知，各部分的二重积分之和就是在积分区域D上的二重积分，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

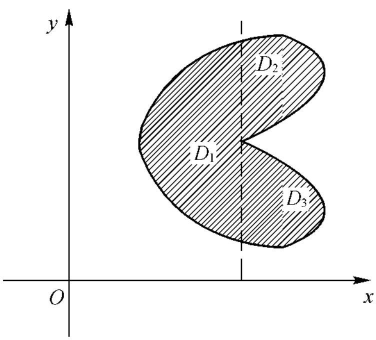


图 6-7-4

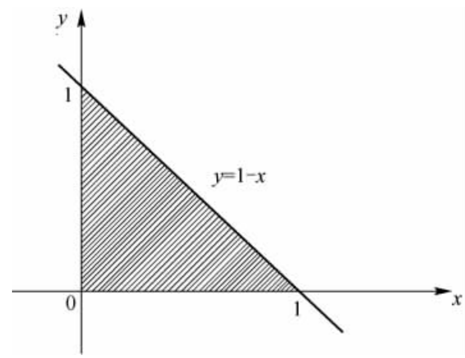


图 6-7-5

例 1　改变$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$的积分次序．

解　设所给积分区域为D，且所给积分是先对y积分，再对x积分（如图6-7-5所示），即

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\}$$

由于积分区域D既是X－型的，又是Y－型的，也可以写成

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1-y\}$$

于是

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

例 2　改变 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序．

解　所给积分由两个部分组成，设它们的积分区域分别为 D_1 与 D_2，且两个积分都是先对 y 积分，再对 x 积分，如图 6-7-6 所示，即

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{2x-x^2}\}$$
$$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2-x\}$$

两个积分区域 D_1 与 D_2 可以合并为 D，可以写成

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,1-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 2-y\}$$

于是

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

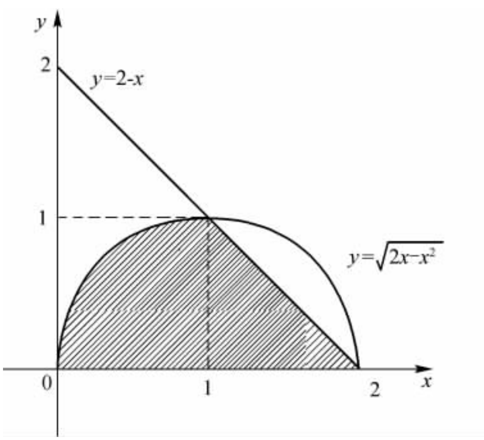


图 6-7-6

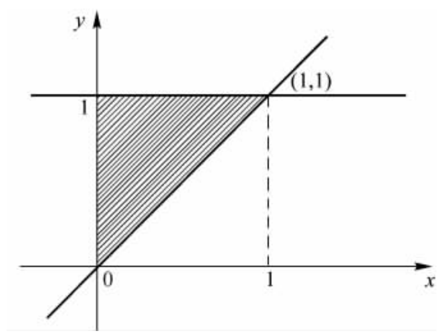


图 6-7-7

例 3　求 $\iint\limits_D x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以 $(0,0)$，$(1,1)$，$(0,1)$ 为顶点的三角形．

解　积分区域如图 6-7-7 所示. 因为 $\int \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 无法用初等函数表示，所以计算积分时必须考虑改变积分次序.

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}\mathrm{d}y^2=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$$

例 4 计算$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的区域.

解 积分区域如图 6-7-8 所示.

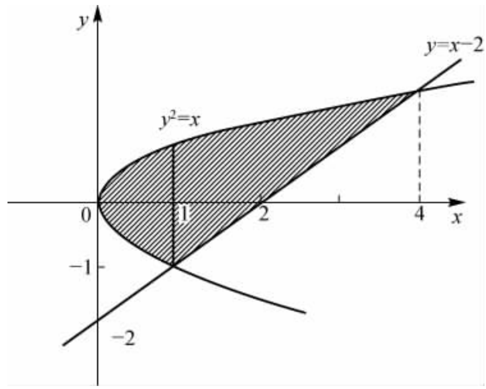


图 6-7-8

解法一 把积分区域化分成两个 X − 型积分区域,即

$$D_1: 0\leqslant x\leqslant 1,\ -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant \sqrt{x}$$

$$D_2: 1\leqslant x\leqslant 4,\ x-2\leqslant y\leqslant \sqrt{x}$$

故

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} xy\,\mathrm{d}\sigma\\ &=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xy\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}xy\mathrm{d}y\\ &=\frac{45}{8}\end{aligned}$$

解法二 积分区域是 Y − 型的,即

$$D: -1\leqslant y\leqslant 2,\ y^2\leqslant x\leqslant y+2$$

故

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\,\mathrm{d}x=\frac{45}{8}$$

值得注意的是,在化二重积分为二次积分时,为了计算简便,需要选择恰当的二次积分的次序.这时,既要Ж 积分区域 D 的形状,又要考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特性.

第七章　常微分方程

前面各章节讨论的是给定的函数所具有的性质，而在大量的自然科学和工程技术问题中，有时并不能直接找出所需要的函数关系，而是根据问题所给的条件，可以列出一个含有所求函数导数的关系式，这种关系式就是**微分方程**. 将未知函数从微分方程中解出来，这是本章的基本任务.

本章主要介绍微分方程的一些基本概念以及常用的几种微分方程的解法.

第一节　微分方程的概念

一、微分方程的基本概念

首先来看一个例子.

例 1　已知一条曲线经过点(2,1)，且该曲线上任一点 $P(x,y)$ 处切线斜率为 x，求该曲线的方程.

解　设所求曲线方程为 $y=y(x)$. 由导数的概念及几何意义，可知有下面关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$$

对上式积分，可得

$$y=\frac{1}{2}x^2+C$$

其中 C 为任意常数. 再将已知条件 $y|_{x=2}=1$ 代入，得

$$1=\frac{1}{2}\times 2^2+C$$

解得

$$C=-1$$

从而所求曲线方程为

$$y=\frac{1}{2}x^2-1$$

在所得关系式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$ 中，包含了所求的未知函数的导数，这种含有未知函数的

导数的方程就是**微分方程**.

定义 含有自变量、未知函数及其导数(或微分)的方程称为**微分方程**.当未知函数是一元函数时,该方程称为**常微分方程**;当未知函数是多元函数时,称为**偏微分**Ж .

例如:

(1) $y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x=0$;

(2) $(y'')^2+y=0$;

(3) $(2x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$;

(4) $y''+y=3\mathrm{e}^{2x}\cos x$;

(5) $y^{(4)}-3y^{(3)}+y''-x=0$;

(6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+y, u=u(x,y)$;

(7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u=u(x,y)$.

以上都是微分方程.其中(1)~(5)式是常微分方程,而(6)式和(7)式是偏微分方程.

在本书中,我们仅讨论一些常见的常微分方程的解法,以后简称为**微分方程**.

在上面例子中,微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数是不一样的,将此阶数称为微分方程的**阶**.例如,(1)式和(3)式是一阶的,而(2)式和(4)式是二阶的,(5)式是四阶的.

一般地,n 阶微分方程的形式为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{7-1-1}$$

在此式中,$y^{(n)}$ 项是必须出现的,而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等不一定出现.例如,5 阶微分方程

$$y^{(5)}+1=0$$

若能从式(7-1-1)中解出 $y^{(n)}$,则

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

注意 以后我们讨论的方程都是能将 $y^{(n)}$ 解出的方程,且右端函数 f 在所讨论的范围内是连续的.

二、微分方程的解

若将函数 $y=f(x)$ 代入微分方程后能使方程变成恒等式,则 $y=f(x)$ 就是该微分方程的解.也就是说,若 $y=f(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数,在区间 I 上,如有

$$F(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称 $y=f(x)$ 为**微分方程**(7-1-1)**在区间 I 上的解**.

例 2　验证函数 $y=e^{\lambda_1 x}$ 和 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ 均为方程

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$$

的解.

解　$y=e^{\lambda_1 x}$ 的一阶导数和二阶导数分别为

$$y'=\lambda_1 e^{\lambda_1 x},\quad y''=\lambda_1{}^2e^{\lambda_1 x}$$

将 y,y',y'' 代入原方程中,则

$$\lambda_1{}^2e^{\lambda_1 x}-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_1e^{\lambda_1 x}+\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_1 x}\equiv 0$$

因此 $y=e^{\lambda_1 x}$ 是原方程的解.

函数 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ 的一阶导数和二阶导数分别为

$$y'=C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}$$

$$y''=C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x}$$

代入原方程,则

$$(C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x})-(\lambda_1+\lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x})+\lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x})\equiv 0$$

说明 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ 也是原方程的解.

从本例可以看出,随着 C_1、C_2 取值的不同,微分方程的解将有无穷多个. 而 $y=e^{\lambda x}$ 只是当 $C_1=1,C_2=0$ 时的一个特殊情况,并且 $y=e^{\lambda x}$ 满足 $x=0,y=1$ 和 $x=0,y'=\lambda_1$ 的条件.

一般地,若微分方程的解中包含任意常数,且独立的(即不可合并而使个数减少的)任意常数的个数与微分方程的阶数相同,这样的解称为**微分方程的通解**. 例如,在例 1 中,解 $y=\dfrac{1}{2}x^2+C$ 包含一个任意常数,而方程是一阶的,所以此解为方程 $\dfrac{dy}{dx}=x$ 的通解. 又如在本例中,$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ 是二阶方程 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$ 的通解.

由所给条件,从通解中定出所有任意常数而得到的解称为**微分方程的特解**,所给的条件称为**初始条件**. 在例 1 中,原方程满足初始条件 $y|_{x=2}=1$ 的特解为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-1$. 在例 2 中,$y=e^{\lambda_1 x}$ 是原方程的一个特解,满足的初始条件为 $y|_{x=0}=1$ 和 $y'|_{x=0}=\lambda_1$.

一般当方程为一阶时,其初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$,当方程是二阶时,初始条件为

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y_1$$

对于 n 阶微分方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

其初始条件为

$$y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y_1,\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1}$$

其中 $y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$ 均为常数.

注意 对一阶微分方程来说,它的解的图象是一条曲线,称为微分方程的积分曲线.满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解 $y=f(x)$ 是微分方程通过点 (x_0,y_0) 的那条积分曲线.

例 3 验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2x\mathrm{e}^{x}$ 是微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解,并求出满足初始条件 $y|_{x=0}=4,y'|_{x=0}=-2$ 的特解.

解 容易求得 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}$ 的一阶导数和二阶导数为

$$y'=(C_2-C_1)\mathrm{e}^{-x}-C_2x\mathrm{e}^{-x}$$

$$y''=(C_1-2C_2)\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}$$

代入方程中,得

$$(C_1-2C_2)\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}+2[(C_2-C_1)\mathrm{e}^{-x}-C_2x\mathrm{e}^{-x}]+C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}=$$
$$[(C_1-2C_2)+2(C_2-C_1)+C_1]\mathrm{e}^{-x}+(C_2-2C_2+C_2)x\mathrm{e}^{-x}\equiv 0$$

因此,$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}$ 是原微分方程的解.又因为其中含有两个独立的任意常数,因而是方程的通解.

将初始条件 $y|_{x=0}=4,y'|_{x=0}=-2$ 代入,可得

$$C_1=4,\quad C_2-C_1=-2$$

从而解出

$$C_1=4,\quad C_2=2$$

因此,满足初始条件的特解为

$$y=4\mathrm{e}^{-x}+2x\mathrm{e}^{-x}$$

第二节　一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

形如

$$y'=f(x)g(y)$$

的微分方程,称为**可分离变量的微分方程**,其中 $f(x)$,$g(y)$ 分别是变量 x,y 的连续函数,且 $g(y)\neq 0$.这类方程的特点是,经过适当运算,可将两个不同变量的函数与微分分离到方程两边.因此,这类方程的解法如下:

（1）分离变量

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x,$$

（2）两边积分

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x,$$

（3）求出积分，得通解

$$G(y) = F(x) + C$$

其中，$G(y)$，$F(x)$ 分别是$\frac{1}{g(y)}$，$f(x)$ 的原函数，C 为任意常数.

例 1　求微分方程 $y' + xy = 0$ 的通解.

解　方程变形为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -xy$，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -x\mathrm{d}x(y \neq 0)$$

两边积分，得

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x$$

求得

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

所以

$$|y| = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2 + C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

即

$$y = \pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

令 $C = \pm \mathrm{e}^{C_1}$，则得所求微分方程的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}（C \text{ 为任意常数}）.$$

例 2　求微分方程 $y' = 2xy^2(y \neq 0)$ 的通解.

解　分离变量，得

$$\frac{1}{y^2\mathrm{d}y} = 2x\mathrm{d}x$$

两边积分，得

$$\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \int 2x\mathrm{d}x,$$

即

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

所以，所求微分方程的通解为

$$y=-\frac{1}{x^2+C}.$$

例 3 求微分方程 $xy^2\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

解 方程变形为

$$(1+x^2)\mathrm{d}y=-xy^2\mathrm{d}x$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=-\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

两边积分,得

$$\int\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 代入上式,得 $C=1$.

故所求微分方程的特解为

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+1,$$

即

$$y=\frac{2}{\ln(1+x^2)+2}.$$

例 4 将一个温度为 100 ℃ 的物体放在 20 ℃ 的恒温环境中冷却,求该物体温度变化的规律.

解 设 t 时刻物体温度为 $\theta(t)$,根据冷却定律,物体冷却的速度与温差 $(\theta-20)$ 成正比,则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-k(\theta-20)\\ \theta(0)=100\end{cases},$$

其中常数 $k>0$,负号表示湿度是减少的,即 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}<0$.

上述方程是可分离变量的微分方程,解得

$$\theta=20+C\mathrm{e}^{-kt},$$

将初始条件 $\theta(0)=100$ 代入上式,得 $C=80$.

所以,所求物体湿度的变化规律为

$$\theta=20+80\mathrm{e}^{-kt}.$$

这说明,冷却时间越长,物体温度越接近环境温度.

二、齐次方程

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7-2-1}$$
的微分方程称为**齐次方程**. 例如，
$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2\sqrt{xy}$$
方程可变形为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}$$
此方程为齐次方程.

对于齐次方程(7-2-1)，令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$. 因此
$$\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$$
从而
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
将此式代回式(7-2-1)中，得
$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)$$
可分离变量为
$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
于是将齐次方程化成了可分离变量的方程，可两边积分求解.

例 5　求解方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2\sqrt{xy}$.

解　可将原方程化为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}$$
令 $u=\frac{y}{x}$，则
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
代入上式中，可得
$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{u}-u$$

因此
$$\frac{\mathrm{d}u}{2(u-\sqrt{u})}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
两端分别关于 u 和 x 积分，得
$$\int\frac{1}{2\sqrt{u}(\sqrt{u}-1)}\mathrm{d}u=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
从而
$$\ln(\sqrt{u}-1)+\ln x=\ln C$$
即
$$x(\sqrt{u}-1)=C$$
将 $u=\frac{y}{x}$ 代回，得
$$\sqrt{xy}-x=C$$
此即原方程的通解.

例 6 试求微分方程 $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 满足条件 $y|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$ 的特解.

解 原方程可写成
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$
令 $u=\frac{y}{x}$，则
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
代入，得
$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}$$
分离变量，得
$$u\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
两边积分，得
$$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$$
将 $u=\frac{y}{x}$ 代回，整理得原方程的通解为
$$y^2=2x^2(\ln|x|+C)$$
将初始条件 $y|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$ 代入，得 $C=1$，于是所求特解为
$$y^2=2x^2(\ln|x|+1)$$

三、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{7-2-2}$$

的方程，称为**一阶线性微分方程**，其中 $P(x)$，$Q(x)$ 为已知函数.

当 $Q(x)\equiv 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{7-2-3}$$

称其为**齐次线性方程**；当 $Q(x)\neq 0$ 时，称式(7-2-2)为**非齐次线性方程**.

我们先求齐次方程(7-2-3)的解. 将式(7-2-3)分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

即

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

令 $C==\pm\mathrm{e}^{C_1}$，得

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{7-2-4}$$

当 $C=0$ 时，$y=0$ 仍是方程(7-2-3)的解. 因此，(7-2-4)式中的 C 可取任意实数. 式(7-2-4)即为一阶线性齐次方程(7-2-3)的通解.

我们再求一阶线性非齐次方程(7-2-2)的通解，由于其右端 $Q(x)$ 是 x 的函数，因此，可设想将其对应的线性齐次方程(7-2-3)通解中的任意常数 C 换成待定函数 $C(x)$ 后，仍有可能是方程(7-2-2)的解.

令 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 为线性非齐次方程(7-2-2)的解，为了求出 $C(x)$，可将所设代入方程(7-2-2)，得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

即

$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

两边积分，得

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$$

所以方程(7-2-2)的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right] \tag{7-2-5}$$

式(7-2-5)就是一阶线性非齐次方程(7-2-2)的通解公式.

上述求解方法称为**常数变易法**，用常数变易法求一阶线性非齐次方程通解的步

骤为：

(1) 求出线性非齐次方程所对应的齐次方程的通解；

(2) 将求出的齐次方程通解中的任意常数 C 设为待定函数 $C(x)$，代入非齐次方程，求出 $C(x)$；

(3) 写出线性非齐次方程的通解.

这样，在求线性非齐次方程的通解时，我们可采用常数变易法，也可以直接利用通解公式来求解.

例 1 求方程 $2y'-y=\mathrm{e}^x$ 的通解.

解 方法一 使用常数变易法求解

将原方程变形为

$$y'-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

其对应的线性齐次方程为

$$y'-\frac{1}{2}y=0,$$

分离变量，两边积分，求得通解为

$$y=C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

设所给线性非齐次方程的解为 $y=C(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$，将 y,y' 代入原方程，得

$$C'(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

于是

$$C(x)=\int\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C,$$

所以，原方程的通解为

$$y=C(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^x.$$

方法二 利用通解公式求解

将原方程变形为

$$y'-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

则 $P(x)=-\frac{1}{2}$，$Q(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$，所以由通解公式(7-2-5)得原方程通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int(-\frac{1}{2})\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int(-\frac{1}{2})\mathrm{d}x}+C\right]\\&=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left[\int\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C)\end{aligned}$$

$$= e^x + Ce^{\frac{x}{2}}.$$

例 2　求微分方程 $xy' - y = 1 + x^3$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解.

解　将原方程变形为

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} + x^2.$$

这是一阶线性非齐次方程,其中 $P(x) = -\frac{1}{x}$,$Q(x) = \frac{1}{x} + x^2$.

把它们代入通解公式(7-2-5),得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int(-\frac{1}{x})dx} \cdot \left[\int\left(\frac{1}{x} + x^2\right) \cdot e^{\int(-\frac{1}{x})dx} dx + C\right] \\ &= x\left[\int\left(\frac{1}{x} + x^2\right)\frac{1}{x}dx + C\right] \\ &= x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + C\right) \\ &= \frac{1}{2}x^3 + Cx - 1. \end{aligned}$$

所以原方程的通解为

$$y = \frac{1}{2}x^3 + Cx - 1.$$

将初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 代入上式,得 $C = \frac{1}{2}$,

因此,所求微分方程的特解为

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1.$$

第三节　可降阶的高阶微分方程

二阶及二阶以上的微分方程统称为**高阶微分方程**. 对于高阶微分方程,一般来说是不易求解的. 但对于某些特殊的微分方程. 可以将其转化为阶数较低的微分方程求解. 本节以二阶微分方程为例,介绍三类可降阶的微分方程的解法.

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程

对于形如 $y^{(n)} = f(x)$ 的方程,方程的右端不含有未知函数 y 及 y 的导数,只要对方程两端 n 次积分,就可得到方程的解.

例 1　求方程 $y'' = x + \sin x$ 的通解.

解　对方程两端积分,得

$$y' = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + C_1$$

C_1 为任意常数. 再次对方程两端积分,可得

$$y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1 x + C_2$$

C_1,C_2 均为任意常数,此即为原方程的通解.

例 2 求方程 $y''' = e^x + 1$ 的通解.

解 对方程两边积分,得

$$y'' = \int (e^x + 1)dx = e^x + x + c_1,$$

再积分,得

$$y' = \int (e^x + x + c_1)dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2,$$

第三次积分,得

$$\begin{aligned} y &= \int \left(e^x + \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2\right)dx \\ &= e^x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3. \end{aligned}$$

此式即为所求微分方程的通解.

例 3 求方程 $y''' = \cos x$ 的通解.

解 对方程两边积分,得

$$y'' = \int \cos x dx = \sin x + C_1,$$

再积分,得

$$y' = \int (\sin x + C_1)dx = -\cos x + C_1 x + C_2,$$

第三次积分,得

$$\begin{aligned} y &= \int (-\cos x + C_1 x + C_2)dx \\ &= -\sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

此式即为所给方程的通解.

二、$y'' = f(x, y')$ 型微分方程

这类微分方程的特点是方程中不显含未知函数 y,可令 $y' = P$,则 $y'' = P'$,原方程可降为 P 为未知函数的一阶微分方程,即

$$P' = f(x, P).$$

若可以从该方程中求出其通解 $P = \varphi(x, C_1)$，即

$$y' = \varphi(x, C_1)$$

两边再积分，便得到原方程的通解.

例 4 求微分方程 $y'' - \dfrac{2}{x+1}y' = 0$ 的通解.

解 令 $y' = P$，则原方程化为

$$P' - \frac{2}{x+1}P = 0,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln P = \ln(x+1)^2 + \ln C_1,$$

所以
$$P = C_1(x+1)^2,$$

即
$$y' = C_1(x+1)^2.$$

对上式两边再积分，得

$$y = \frac{1}{3}C_1(x+1)^3 + C_2.$$

例 5 求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3$ 的特解.

解 令 $y' = P$，则 $y'' = P'$，将它们代入原方程，得

$$(1+x^2)P' = 2xP,$$

分离变量，得

$$\frac{1}{P}\mathrm{d}P = \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln P = \ln(1+x^2) + \ln C_1,$$

即
$$P = C_1(1+x^2),$$

亦即
$$y' = C_1(1+x^2),$$

由初始条件 $y'|_{x=0} = 3$，得 $C_1 = 3$，于是有

$$y' = 3(1+x^2),$$

所以
$$y = x^3 + 3x + C_2.$$

又由初始条件 $y|_{x=0} = 1$，得 $C_2 = 1$，

所以原微分方程的特解为 $y = x^3 + 3x + 1$.

* 三、$y''=f(y,y')$ 型微分方程

这类方程右端不显含自变量 x，求解这类方程可令 $y'=p(y)$，则

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

于是方程 $y''=f(y,y')$ 可化为

$$p=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$$

这是关于 x 和 p 的一阶微分方程，如果能求出其解 $p=\varphi(y,C_1)$，则由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$ 即可求出原方程的解.

第四节　二阶常系数齐次线性微分方程

一、二阶常系数齐次线性微分方程解的性质

定义　形如

$$y''+py'+qy=0 \tag{7-4-1}$$

的方程(其中 p,q 为常数)，称为**二阶常系数齐次线性微分方程**.

对于此类方程，我们有下述定理：

定理(齐次线性方程解的叠加原理)　若 y_1,y_2 是齐次线性方程(7-4-1)的两个解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 也是(7-4-1)的解，且当 y_1 与 y_2 线性无关时，$y=C_1y_1+C_2y_2$ 就是式(7-4-1)的通解.

证　将 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 直接代入方程(7-4-1)的左端，得

$$(C_1y_1''+C_2y_2'')+p(C_1y_1'+C_2y_2')+q(C_1y_1+C_2y_2)$$
$$=C_1(y_1''+py_1'+qy_1)+C_2(y_2''+py_2'+qy_2)$$
$$=C_10+C_20=0$$

所以，$y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程(7-4-1)的解.

由于 y_1,y_2 线性无关，所以 y_1 与 y_2 是两个独立的任意常数，这与方程(7-4-1)的阶数相同，因此，$y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程(7-4-1)的通解.

二、二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法

齐次线性方程解的叠加原理告诉我们，欲求齐次线性方程(7-4-1)的通解，只需求出它的两个线性无关的特解即可. 为此，我们先分析齐次线性方程的特点. 齐次线

性方程(7-4-1)左端是未知函数与未知函数一阶导数、二阶导数的某种组合,且它们分别乘以"适当"的常数后,可合并成零,这就是说,适合于方程(7-4-1)的函数 y 必须与其一阶导数、二阶导数只差一个常数因子,而具有此特征的最简单的函数是 e^{rx}(其中 r 为常数),为此我们令 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 为方程(7-4-1)的特解,并代入方程(7-4-1)得 $r^2\mathrm{e}^{rx}+pr\mathrm{e}^{rx}+q\mathrm{e}^{rx}=0$.

因为 $\mathrm{e}^{rx}\neq 0$,所以有

$$r^2+pr+q=0 \tag{7-4-2}$$

由此可见,只要 r 满足方程(7-4-2),函数 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 就是方程(7-4-1)的解.我们称方程(7-4-2)为微分方程(7-4-1)的**特征方程**,称方程(7-4-2)的根为**特征根**.下面我们就特征方程(7-4-2)的不同特征根讨论齐次线性方程(7-4-1)的解.

(1) 当特征方程(7-4-2)有两个不同的实根 r_1 和 r_2 时,则方程(7-4-1)有两个线性无关的解 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$,$y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$.此时方程(7-4-1)有通解

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

(2) 当特征方程(7-4-2)有两个相同实根时,即 $r_1=r_2=r$,方程(7-4-1)只有一个解 $y_1=\mathrm{e}^{rx}$.

这时直接验证可知 $y_2=x\mathrm{e}^{rx}$ 是方程(7-4-1)的另一个解,且 y_1,y_2 线性无关,于是此时有通解

$$\begin{aligned} y &= C_1\mathrm{e}^{rx}+C_2\mathrm{e}^{rx}. \\ &= (C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}. \end{aligned}$$

(3) 当特征方程(7-4-2)有一对共轭复根时,即 $r=\alpha+\beta\mathrm{i}$(其中 α,β 均为实常数,且 $\beta\neq 0$),此时方程(7-4-1)有两个线性无关的解 $y_1=\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})x}$ 和 $y_2=\mathrm{e}^{(\alpha-\beta\mathrm{i})x}$,则方程(7-4-1)的通解为

$$\begin{aligned} y &= A\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})x}+B\mathrm{e}^{(\alpha-\beta\mathrm{i})x} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}). \end{aligned}$$

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,还可得到实数形式的通解

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x),$$

其中 $C_1=A+B$,$C_2=(A-B)\mathrm{i}$.通常情况下,如无特别声明,均要求写出实数形式的解.

根据上述讨论,求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的步骤是:

第一步　写出微分方程的特征方程 $r^2+pr+q=0$;

第二步　求出特征根;

第三步　根据特征根的情况写出所给微分方程的通解.

例 1　求方程 $y''+5y'+6y=0$ 的通解.

解 该方程的特征方程为

$$r^2+5r+6=0,$$

其特征根为 $$r_1=-2, r_2=-3,$$

所以，所给微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}(\text{其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

例 2 求方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解.

解 该方程的特征方程为

$$r^2+2r+1=0,$$

其特征根为 $$r=r_1=r_2=-1,$$

所以，所求微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}(\text{其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意实数}).$$

例 3 求方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

解 该方程的特征方程为

$$r^2-2r+5=0,$$

特征根为 $$r_1=1+2\mathrm{i}, r_2=1-2\mathrm{i},$$

所以，所求微分方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)(\text{其中 } C_1 \text{ 为任意实数}, C_2 \text{ 为复数}).$$

* 第五节 二阶常系数非齐次线性微分方程

现在我们研究二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{7-5-1}$$

的解法，其中 p, q 为常数.

首先，由下面定理给出方程(7-5-1)的一个通解形式.

定理 设 $y^*(x)$ 是方程(7-5-1)的一个特解，$Y(x)$ 为方程(7-5-1)对应的齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解，则

$$y=Y(x)+y^*(x)$$

即为非齐次线性微分方程(7-5-1)的通解.

这个定理说明了方程(7-5-1)的通解是由它的一个特解和对应的齐次方程的通解构成的.

显然，特解 y^* 与方程式中的 $f(x)$ 的具体情况有关. 在实际问题中，经常遇到 $f(x)$ 为多项式，指数函数和三角函数. 对于这些类型的函数，其特点是求导以后仍

为同种类型的函数形式.因此,可以用待定系数法来求 y^*.我们主要Ж　$f(x)$ 具有下面两种形式时,方程(7-5-1)的求解问题.

(1) $f(x)=p_n(x)e^{\alpha x}$,α 为常数,$p_n(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式;

(2) $f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x$,其中 M,N,β 均为常数.

一、$f(x)=p_n(x)e^{\alpha x}$ 型

由于多项式与指数函数乘积的各阶导数仍为多项式与指数函数的乘积.因此,我们可以推测方程(7-5-1)的特解形式为

$$y^*=Q(x)e^{\alpha x}$$

其中 $Q(x)$ 为待定的多项式,若 $Q(x)$ 可以求出,则方程(7-5-1)的特解问题也就解决了.

由
$$y^{*\prime}=(Q'+\alpha Q)e^{\alpha x}$$
$$y^{*\prime\prime}=(Q''+2\alpha Q'+\alpha^2Q)e^{\alpha x}$$

将 $y^*,y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$ 代入式(7-5-1)中,整理可得

$$Q''+(2\alpha+p)Q'+(\alpha^2+p\alpha+q)Q=p_n(x) \tag{7-5-2}$$

(1) 若 $\alpha^2+p\alpha+q\neq0$,即 α 不是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根时,式(7-5-2)说明 $Q(x)$ 与 $p_n(x)$ 的次数相同.

可设 $Q(x)=Q_n(x)$,$Q_n(x)$ 为次数同为 n 的待定多项式.将其代入(7-5-2),比较等式两端同次幂的系数,就可以确定 $Q_n(x)$ 的各项系数,从而得到所求特解 $y^*=Q_n(x)e^{\alpha x}$.

(2) 若 $\alpha^2+p\alpha+q=0$,但 α 仅是两个不同特征根之一时,则 $\alpha\neq-\dfrac{p}{2}$,因此,$2\alpha+p\neq0$,式(7-5-2)变为 $Q''+(2\alpha+p)Q'=p_n(x)$.因此,$Q(x)$ 的次数比 $p_n(x)$ 高一次.

可设 $Q(x)=xQ_n(x)$,用同样的方法可确定其各项系数.

(3) 若 $\alpha^2+p\alpha+q=0$ 且 $2\alpha+p=0$,说明 $\alpha=-\dfrac{p}{2}$ 是双重特征根,此时式(7-5-2)变为

$$Q''=p_n(x)$$

此时表明 $Q(x)$ 的次数比 $p_n(x)$ 高二次.

可设 $Q(x)=x^2Q_n(x)$,用同样的方法可确定其各项系数.

综合(1),(2),(3)可知,方程 $y''+py'+qy=Q_n(x)e^{\alpha x}$ 的特解形式为

$$y^*=x^kQ_n(x)e^{\alpha x}$$

其中,$Q_n(x)$ 为同 $p_n(x)$ 次数相同的待定多项式.而 x 的指数 k 满足

$$k=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 不是特征根时}\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为单特征根时}\\ 2, & \text{当 } x \text{ 为双重特征根时}\end{cases}$$

例 1 求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

解 齐次微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+2r+1=0$$

其特征根为 $r_1=r_2=-1$,且 $\alpha=1\neq-1$,则齐次微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$$

由于 $\alpha\neq-1$,这属于第一种情形,因此,可设原方程的特解形式为

$$y^*=(Ax+B)e^x$$

因此

$$y^{*\prime}=(Ax+A+B)e^x$$

$$y^{*\prime\prime}=(Ax+2A+B)e^x$$

代入原方程中,可得

$$(4Ax+4A+4B)e^x=xe^x$$

约去 e^x,得

$$4Ax+4A+4B=x$$

从而

$$\begin{cases}4A=1\\ 4A+4B=0\end{cases}$$

解得

$$A=\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{4}$$

于是原方程的特解为

$$y^*=\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)e^x$$

因此原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)e^x$$

例 2 求方程 $y''-2y'-3y=e^{3x}$ 的一个特解.

解 对应的特征方程为

$$r^2-2r-3=0$$

其特征根为 $r_1=-1,r_2=3$,而 $\alpha=3=r_2$ 为特征根之一,因此可设方程的特解形式为

$$y^*=Axe^{3x}$$

从而

$$y^{*\prime}=(A+3Ax)e^{3x},y^{*\prime\prime}=(6A+9Ax)e^{3x}$$

将 $y^*,y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$ 代入原方程,得

$$4A = 1$$

于是
$$A = \frac{1}{4}$$

得特解
$$y^* = \frac{1}{4}xe^{3x}$$

例 3 求方程 $y'' - 2y' + y = e^x$ 的通解.

解 由对应的特征方程为

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

可解得特征根为 $r_1 = r_2 = 1$,故

$$\alpha = 1 = r_1 = r_2$$

因此对应的齐次微分方程的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 xe^x$$

由于 $\alpha = 1$ 为双重特征根,可设原方程的特解形式为

$$y^* = Ax^2 e^x$$

因此
$$y^{*\prime} = (2Ax + Ax^2)e^x$$
$$y^{*\prime\prime} = (Ax^2 + 4Ax + 2A)e^x$$

代入原方程之中,得 $2A = 1$,于是 $A = \dfrac{1}{2}$,即

$$y^* = \frac{1}{2}x^2 e^x$$

从而原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 xe^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$$

二、$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$ 型

$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$,其中 M,N,β 均为常数,$\beta > 0$,M,N 不同时为零,则可设原方程(7-5-1)的特解形式为

$$y^* = x^k(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

其中

$$k = \begin{cases} 0, & \text{当 } \pm\beta\mathrm{i} \text{ 不是特征根时} \\ 1, & \text{当 } \pm\beta\mathrm{i} \text{ 是特征根时} \end{cases}$$

例 4 求方程 $y'' + y' = \cos x$ 的一个特解.

解 对应的特征方程为 $r^2 + r = 0$,其特征根为 $r_1 = 0, r_2 = -1$;而 $\beta = 1$,从而 $\pm\beta\mathrm{i} = \pm\mathrm{i}$ 不是特征根,因此可设方程的特解形式为

$$y^* = A\cos x + B\sin x$$

则 $$y^{*\prime} = B\cos x - A\sin x, \quad y^{*\prime\prime} = -B\sin x - A\cos x$$

代入原方程中,可得

$$(B - A)\cos x - (A + B)\sin x = \cos x$$

从而 $$B - A = 1, \quad A + B = 0$$

可解得 $$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}$$

于是原方程的特解为

$$y^{*} = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

第八章　向量代数与空间解析几何

在自然科学和工程技术中，我们经常要遇到一种既有大小又有方向的量，即向量，还会遇到一些空间几何图形．本章我们将介绍向量的概念、向量的运算以及空间解析几何的相关内容．

第一节　空间直角坐标系

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且具有相同的长度单位，这三条轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），三条数轴统称为坐标轴．它们的正方向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，并拢的四个手指从 x 轴的正方向旋转 $90°$ 指向 y 轴的正方向，竖起的大拇指指向就是 z 轴的正方向，如图 8-1-1所示．这样的三条坐标轴就组成了空间直角坐标系，点 O 称为坐标原点（简称原点）．

在空间直角坐标系中，任意两条坐标轴确定的平面称为坐标面．三个坐标轴确定了三个平面，分别称为 xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面．三个坐标面将整个空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，八个卦限分别用 Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅷ 表示（如图 8-1-2 所示）．

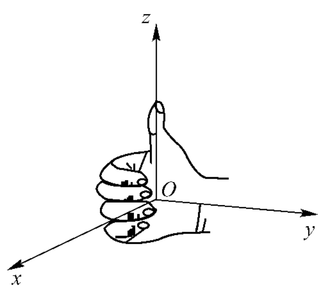


图 8-1-1

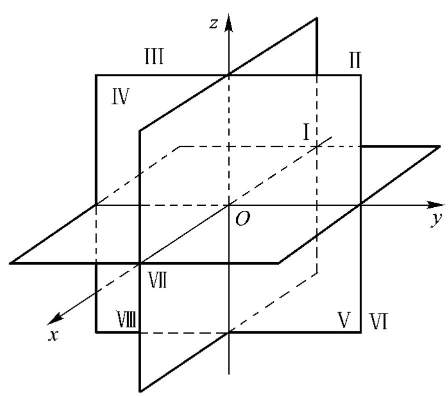


图 8-1-2

有了空间直角坐标系，就可以建立空间中的点和有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间中一已知点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，交点分别为 P,Q,R（如图 8-1-3 所示）. 设这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上坐标依次为 x,y,z，则点 M 唯一确定了一个三元有序数组 (x,y,z). 反过来，给定了一个三元有序数组 (x,y,z)，则可在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标依次为 x,y,z 的三个点 P,Q,R，然后过这三个点分别作一个与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面，这三个平面有唯一的交点，设为 M，则一个三元有序数组 (x,y,z) 就唯一地确定了空间一点 M. 这样，利用空间直角坐标系，就在三元有序数组 (x,y,z) 与空间中任意一点 M 之间建立了一一对应关系. 称这个三元有序数组 (x,y,z) 为点 M 的直角坐标，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标，坐标为 (x,y,z) 的点 M，记为 $M(x,y,z)$.

显然，坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴，y 轴和 z 轴上任意一点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面上任意一点的坐标分别为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

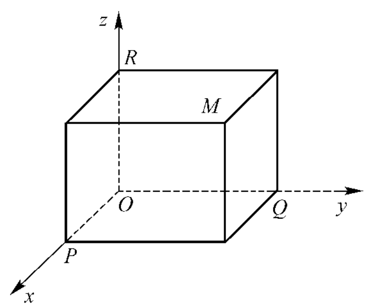


图 8-1-3

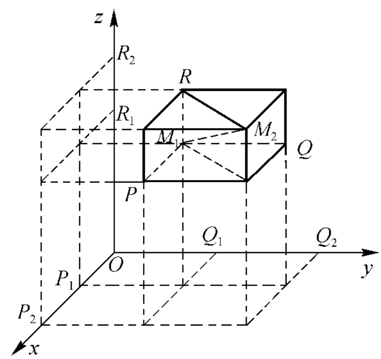


图 8-1-4

对空间中两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，可用其坐标表示它们间的距离 d.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中两点，如图 8-1-4 所示，过 M_1,M_2 各作三个平面分别垂直于三条坐标轴，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体. 线段 M_1P,M_1Q,M_1R 是它的三条棱，它的对角线 M_1M_2 的长度设为 d，则

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2$$

因为

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$$
$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$$

$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$$

所以

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

即
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{8-1-1}$$

式(8-1-1)称为**两点间距离公式**.

特别地,空间任一点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{8-1-2}$$

例　已知一动点 $M(x,y,z)$ 到两个点 $A(1,2,3)$ 和 $B(-1,-3,0)$ 的距离相等,求点 M 的坐标满足的方程.

解　由已知条件得 $|MA| = |MB|$,根据公式(8-1-1),有

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2 + z^2}$$

整理得
$$2x + 5y + 3z - 2 = 0$$

第二节　向　　量

一、向量的概念

我们常见的量有一类是数量,如温度、长度、质量等,这类量只有大小,没有方向,我们习惯上称其为**标量**;还有一类量,既有大小,又有方向,如力、速度、加速度等,称其为**向量**(或矢量).我们常用有向线段来表示向量,以起点为 M,终点为 N 的向量可记为$\overrightarrow{MN}$,如图 8-2-1 所示.也可以用一个拉丁字母上面加一个箭头或用一个黑体字母来表示向量,如向量$\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{v}$ 或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{v}$ 等.

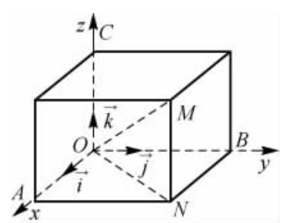


图 8-2-1

向量的大小称为向量的模.向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$,向量$\overrightarrow{AM}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AM}|$.

特别地,模为 1 的向量称为**单位向量**.模为 0 的向量称为**零向量**,记为 $\mathbf{0}$.规定零向量的方向为任意方向.

定义 1　如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等且方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

满足定义 1 的向量在空间平移后不变,因此把定义 1 规定相等的向量也称为自由向量.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

在力学中，求作用于同一质点的两个不同方向的力的合力 $\boldsymbol{F}$ 时，采用平行四边形和三角形法则(如图 8-2-2 所示).

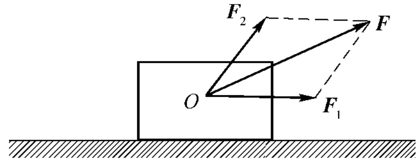


图 8-2-2

由此，我们给出向量加法的法则：

法则 1(平行四边形法则)　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，任取一点 A，作$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为邻边作平行四边形，其对角线向量$\overrightarrow{AC}$(如图 8-2-3 所示)称为向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

法则 2(三角形法则)　以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量.

从图 8-2-3 和 8-2-4 可以看出，向量的加法满足以下运算律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

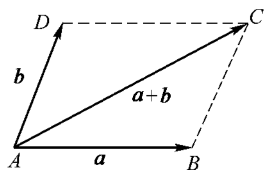


图 8-2-3

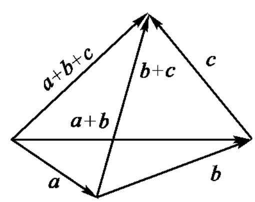


图 8-2-4

由向量加法的三角形法则及交换律、结合律得 n 个向量相加的法则如下：以前一个向量的终点作为下一个向量的始点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 8-2-5 所示，有

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5$$

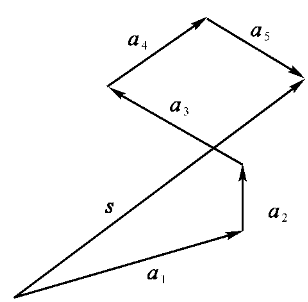


图 8-2-5

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$(见图 8-2-6 所示). 由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$$

把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，如图 8-2-7 所示.

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

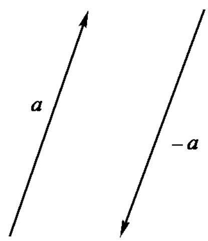


图 8-2-6

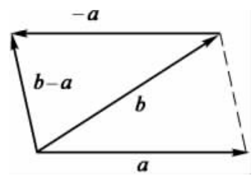


图 8-2-7

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定它为一个向量，它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$. 它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反（如图 8-2-8 所示）.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

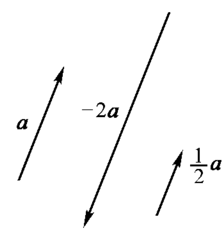


图 8-2-8

向量与数的乘法满足以下运算规律：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

根据向量与数的乘法的规定，有：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$.

(2) 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_a$，则 $|\boldsymbol{e}_a|=1$，且 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，即

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$$

例 2　在 $\triangle ABC$ 中，D、E 是 BC 边上的三等分点（如图 8-2-9 所示），设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 来表示 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$.

解　由三角形法则，有 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，再由向量与数的乘法定义，有

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad \overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

从 $\triangle ABD$ 及 $\triangle AEC$ 中可得

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a})$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$$

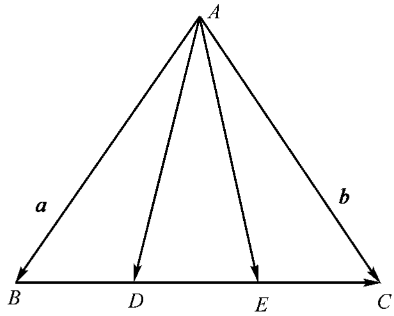


图 8-2-9

三、向量的坐标表示

1. 向径及其坐标表示

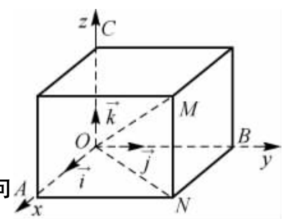


图 8-2-10

起点为坐标原点 O，终点为 M 的向量$\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的**向径**(也称为点 M 的位置向量)，记为 $r(M)$ 或$\overrightarrow{OM}$(如图 8-2-10 所示).

在坐标轴上分别与 x 轴，y 轴，z 轴方向相同的单位向量称为**基本单位向量**，分别用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示.

若点 M 的坐标为(x,y,z)，则向量$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，由向量的加法法则得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}\\&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}\\&=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即点 $M(x,y,z)$ 的向径$\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式为

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

还可简记为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}.$$

例 3 写出点 $A(1,2,1)$ 及 $B(4,-7,3)$ 的向径.

解 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$；

$\overrightarrow{OB}=4\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

2. 向量的坐标表达法

设两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则以 M_1 为起点，以 M_2 为终点的向量

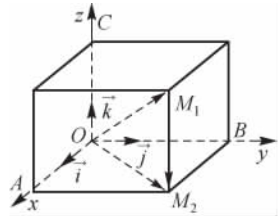


图 8-2-11

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1},$$

如图 8-2-11 所示，O 为坐标原点.

又因为向径

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k};$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

于是

$$\begin{aligned}M_1M_2&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 4　向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 的模.

任给一向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，都可将其视为以点 $M(a_1,a_2,a_3)$ 为终点的向径 $\overrightarrow{OM}$，于是，由图 8-1-6 不难看出，

$$|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2$$

即

$$|\boldsymbol{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$

所以向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

3. 空间两点间的距离公式

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离记为 $d(M_1M_2)$，则

$$\begin{aligned}d(M_1M_2)&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\\&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\end{aligned}$$

该公式显然是平面上两点间距离公式的推广.

例 5　计算 $A(1,2,1)$ 与 $B(3,3,0)$ 两点之间的距离.

解　$$\begin{aligned}d(AB)&=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2+(0-1)^2}\\&=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}.\end{aligned}$$

例 6　求证以 $O(0,0,0)$，$M_1(0,1,2,)$，$M_2(1,2,0)$ 为顶点的三角形为等腰三角形.

证　因为

$$|\overrightarrow{OM_1}|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5},$$

$$|\overrightarrow{OM_2}|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5},$$

所以

$$|\overrightarrow{OM_1}|=|\overrightarrow{OM_2}|$$

即 $\triangle M_1OM_2$ 为等腰三角形.

4. 坐标表示下的向量运算

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则有

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}$；

(2)$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k}$；

(3)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}$；

(4)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$；

(5)$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

四、向量的数量积

由物理学知道，一个物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从 A 点移动到 B 点，以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{AB}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(如图 8-2-12 所示).

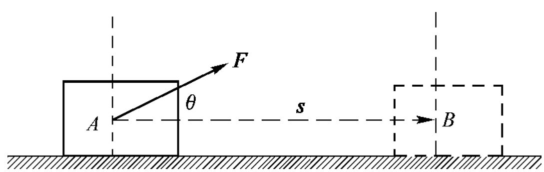


图 8-2-12

从这个问题可以看出，两个向量可以做某种形式的运算，其运算结果是一个数. 为此引入向量的数量积的定义.

定义 2 两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模及它们的夹角余弦的乘积，称为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，记作

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

即
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

根据这个定义，前面讲的功 $\boldsymbol{W}$ 就是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$

由数量积的定义可推得：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$

即两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在此向量方向上的投影的乘积. 这是数量积的几何意义.

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(3) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,ī　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;反之如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,ī $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

因此,单位坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 有以下性质:

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$$

由于零向量的方向可以看作是任意的,故可认为零向量与任何向量都垂直.因此上述结论(3)可以叙述为:向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

容易验证,向量的数量积符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

(3) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

下面利用向量的坐标来表示向量的数量积.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,根据数量积的运算规律,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned}$$

这就是两个向量的数量积的坐标表示式,由该表示式可知,两个向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和.

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量时,有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

将数量积的坐标式及向量的模的坐标表示式代入上式,得

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式,由此式很容易看出两向量垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

例 7　已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,1),\boldsymbol{b}=(3,-1,2)$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times3+2\times(-1)+1\times2=3$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6},|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

所以，两向量的夹角 $\theta = \arccos\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

五、向量的向量积

在图 8-2-13 中，设正电荷 q 在匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动. 若电荷 q 的运动方向与点 P 处的磁场方向的正向夹角为 α，则由物理学可知，点电荷 q 在点 P 处受到的洛伦兹力的大小为

$$|\boldsymbol{F}| = q|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}|\sin\alpha$$

而洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 的方向是垂直纸面向上的，如图 8-2-14 所示.

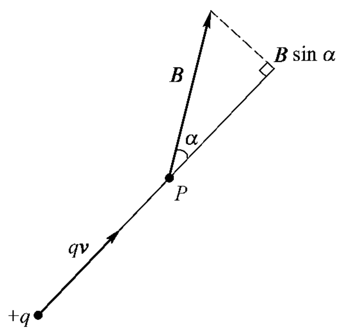


图 8-2-13

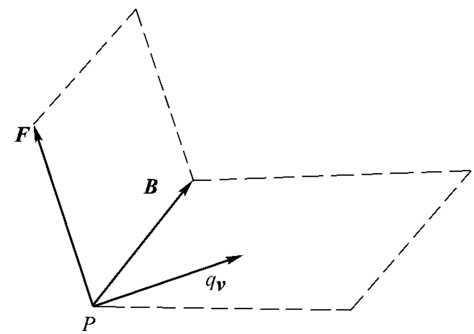


图 8-2-14

这种由两个已知向量来确定另一个向量的情形在其他力学和物理问题中也会遇到，从中可以抽象出两个向量的向量积定义：

定义 3　设向量 $\boldsymbol{c}$ 由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 按下列方式确定：

(1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 间的夹角；

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向同时垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 两个向量，且 $\boldsymbol{c}$ 的指向由右手法则由 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定（如图 8-2-15 所示），则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

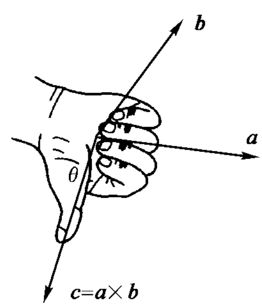


图 8-2-15

根据这个定义，前面讲的洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 可表示为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

由向量积的定义可推得：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,ī　　$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$;反之,如果 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$,ī　　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

由于零向量的方向可以看作是任意的,故可认为零向量与任何向量都平行.因此上述结论(2)可以叙述为:向量 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(3) 对单位坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,有以下性质:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$$

容易验证,向量的向量积符合下列运算规律:

(1) 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

(3) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

下面利用向量的坐标来表示向量的向量积.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,根据向量积的运算规律,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&\quad+a_z\boldsymbol{k}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

为了帮助记忆,利用三阶行列式,上式可写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

由向量积的坐标表示式容易看出两向量平行的充要条件

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

等价于

$$a_yb_z-a_zb_y=0,a_zb_x-a_xb_z=0,a_xb_y-a_yb_x=0$$

或

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

若记上式的比为 λ,则 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.这正是上一节得到的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件.

例 4　求与向量 $\boldsymbol{a}(3,-2,4)$ 和 $\boldsymbol{b}(1,1,-2)$ 都垂直的向量.

解　由向量积的定义可知,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-2&4\\1&1&-2\end{vmatrix}=10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$$

例 5　对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,证明 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2$.

证 因为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}))^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

所以
$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$$

即
$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2$$

第三节　平面及其方程

一、平面的点法式方程

设平面 π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 是平面 π 的法向量(即垂直于平面 π 的向量)，试建立平面 π 的方程.

我们在平面 π 上任取不同于 M_0 的一点 $M(x,y,z)$，则$\overrightarrow{M_0M}$ 在平面 π 上，由于 $\boldsymbol{n}\perp\pi$，所以有

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

因此有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{8-3-1}$$

由于平面 π 上任一点 M 的坐标都满足方程(8-3-1)，而不在平面 π 上的点 M 的坐标都不满足方程(8-3-1)，因此方程(8-3-1)即是所求平面 π 的方程.

给定平面 π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及 π 的一个法向量，其平面方程可按式(8-3-1)写出. 因此式(8-3-1)称为**平面的点法式方程**.

例 1 求过点 $M_1(1,2,-1)$，$M_2(2,3,1)$ 且和平面 $x-y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 因为点 M_1，M_2 均在所求的平面上，所以向量$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1,1,2\}$ 在该平面上，又因为与平面 $x-y+z-1=0$ 垂直，而已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{1,-1,1\}$，故可取该平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

由于该平面过点 $M_1(1,2,-1)$，因此由平面的点法式方程知

$$3(x-1)+(y-1)-2(z+1)=0$$

即所求的平面方程为

$$2x+y-2x-7=0$$

二、平面的一般式方程

将方程(8-3-1)展开整理得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$$

令 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$,则有

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{8-3-2}$$

即平面 π 的方程(8-3-1)可以写成形如式(8-3-2)的三元一次方程. 反过来,任何一个三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$(A,B,C 不同时为零)是否都是代表某一平面的方程呢?

设(x_0,y_0,z_0)为方程(8-3-2)的一组解,则有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \tag{8-3-3}$$

方程(8-3-2)与方程(8-3-3)相减,得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{8-3-4}$$

这正是过点(x_0,y_0,z_0)且以$\{A,B,C\}$为法向量的平面方程. 而式(8-3-2)与式(8-3-4)同解,所以式(8-3-2)代表一平面方程.

总之,在空间直角坐标系下,平面方程为三元一次方程,并且任何一个三元一次方程都表示空间一平面,并称式(8-3-2)为平面的一般式方程,并且方程(8-3-2)的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}.$$

下面讨论方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的一些特殊情形.

当 $D=0$ 时,方程变为 $Ax+By+Cz=0$,显然,这时平面过原点;

当 $A=0$ 时,方程变为 $By+Cz+D=0$,这时平面平行于 x 轴;

当 $A=D=0$ 时,方程变为 $By+Cz=0$,这时平面通过 x 轴;

当 $A=B=0$ 时,方程变为 $Cz+D=0$,这时平面平行于 xOy 坐标平面;

当 $A=B=D=0$ 时,方程变为 $z=0$,这时平面表示 xOy 坐标平面.

对于其他的情况,可以类似地进行讨论.

例 2　求过点 $O(0,0,0)$,$A(0,0,1)$,$B(0,1,1)$ 的平面方程.

解　因为$\overrightarrow{OA}=\{0,0,1\}$,$\overrightarrow{OB}=\{0,1,1\}$,故所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\{-1,0,0\}.$$

所以,所求平面的方程为

$$-1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0,$$

即

$$x=0.$$

例 3 设一平面过点 $M_1(1,0,-2)$，$M_2(1,2,2)$，且与向量 $\boldsymbol{a}=\{1,1,1\}$ 平行，试求此平面的方程.

解 因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-1,2-0,2-(-2)\}=\{0,2,4\}$，所求平面与向量 $\boldsymbol{a}=\{1,1,1\}$ 平行，所以所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\{-2,4,-2\}$$

故所求平面方程为

$$-2(x-1)+4y-2(z+2)=0$$

即

$$x-2y+z+1=0$$

例 4 设一平面通过 x 轴和点 $M(4,-3,-1)$，试求该平面的方程.

解 因为所求平面通过 x 轴，所以可设它的方程为

$$By+Cz=0.$$

由于点 $M(4,-3,-1)$ 在所求的平面上，因此点 M 的坐标满足方程，于是有

$$-3B-C=0,$$

求得 $C=-3B$，将其代入方程 $By+Cz=0$ 中，得所求平面方程为

$$y-3z=0.$$

三、两平面的夹角

两平面的法向量的夹角称为两平面的夹角. 设平面 π_1，π_2 的方程分别为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ 和 } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

它们的夹角为 θ，由于两平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$$

因此，由两向量夹角的余弦公式可知，两平面夹角 θ 的余弦的计算公式为

$$\cos\theta=\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$$

$$=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

例 5 求两平面 $x-y+2z+3=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角 θ.

解 由前计算公式可得

$$\cos\theta=\frac{2-1+2}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

由两向量垂直、平行的充要条件，容易得到两平面垂直、平行的充要条件.

设平面 π_1，π_2 的方程分别为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ 和 } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

则这两个平面垂直的充要条件是

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

这两个平面平行的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

第四节　空间直线及其方程

一般来说，两个不平行的平面会相交，而它们的相交部分就是一条直线. 因此它可以用两个关于 x，y，z 的三元一次方程所组成的三元一次方程组来表示.

设已知有两个相交的平面 π_1，π_2（如图 8-4-1 所示），它们的方程分别为

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

则它们相交而成的直线 L 方程为

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8-4-1}$$

方程(8-4-1) 称为空间直线 L 的**一般**Ж　.

除此以外，直线方程还有另外一些表示方法.

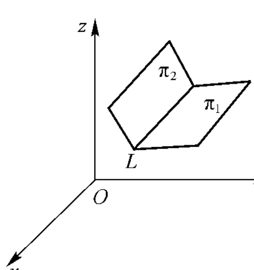


图 8-4-1

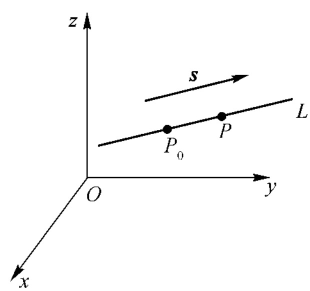


图 8-4-2

如果向量 $\boldsymbol{s}$ 平行于直线 L，那么就称向量 $\boldsymbol{s}$ 为直线 L 的**方向向量**. 任何一条空间

直线都可以由空间一点及一个方向向量来唯一确定.下面就讨论一下这种情形的直线方程.

设直线 L 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,其方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$.在直线上任意取除 P_0 外的一点 $P(x,y,z)$,作向量$\overrightarrow{P_0P}$,则向量$\overrightarrow{P_0P}$平行于方向向量 $\boldsymbol{s}$(如图 8-4-2 所示),而向量

$$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

于是有向量$\overrightarrow{P_0P}$与向量 $\boldsymbol{s}$ 的对应分量成比例,即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{8-4-2}$$

方程(8-4-2)就称为直线 L 的**对称式方程**,其中 m,n,p 为直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标.

在方程(8-4-2)中可设比例常数为 t,即可将方程(8-4-3)写成另外的一种形式:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+mt\\ y&=y_0+nt\\ z&=z_0+pt \end{aligned}\right\} \tag{8-4-3}$$

方程组(8-4-3)称为**空间直线的参数方程**,其中 t 为参数,$t\in(-\infty,+\infty)$.

直线的任一方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标 m,n,p 称为这一直线的一组方向数,而 $\boldsymbol{s}$ 的方向余弦称为这一直线的方向余弦.显然,直线的方向数是与它的方向余弦成比例的一组数.

由于直线的方向向量 $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}$,所以 m,n,p 不能同时为零.特别地,当 m,n,p 中有一个为零时,不妨设 $m=0$,而 $n\neq0,p\neq0$,方程组(8-4-3)应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0\\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$$

当 m,n,p 中有两个为零时,不妨设 $m=0,n=0$,而 $p\neq0$,方程组(8-4-3)应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0\\ y-y_0=0 \end{cases}$$

例 1 求过点(1,2,3)且与平面 $2x+3y-z+2=0$ 垂直的直线方程.

解 因所求直线与已知平面垂直,故此直线的方向向量必与该平面的法向量平行.又该平面的法向量为(2,3,-1),取其为直线的方向向量,则可写出直线的对称式方程

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$$

例 2　用对称式方程和参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z+1=0\\3x-2y+z+2=0\end{cases}$$

解　先找出直线上的一个点(x_0,y_0,z_0).为此,取 $x=0$,代入原方程组,有

$$\begin{cases}-y+z+1=0\\-2y+z+2=0\end{cases}$$

解得

$$y=1,\quad z=0$$

即$(0,1,0)$为所求直线上的一个点.

再求出所求直线的方向向量.因为原方程组的两个平面的法向量

$$\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1),\quad \boldsymbol{n}_2=(3,-2,1)$$

不平行,所以可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\3&-2&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

于是所求直线的对称式方程为$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

参数方程为

$$\begin{cases}x=t\\y=1+2t,\quad t\in(-\infty,+\infty)\\z=t\end{cases}$$

如果已知两条直线的方程,或者一条直线和一个平面的方程,那么就可以讨论它们之间的夹角.

任意两条直线,它们的方向向量的夹角称为两直线的夹角(通常指锐角).于是,设直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 与 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$,按两向量夹角的余弦公式,直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\tag{8-4-4}$$

由此可确定夹角 θ.

特殊地,两条直线垂直的条件为

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

两条直线平行的条件为

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

例 3 求直线 L_1(方程为$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$)与直线 L_2(方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{4}$)的夹角.

解 直线 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(2,2,-1)$,直线 L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(1,1,4)$,设直线 L_1 与 L_2 的夹角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{|2\times1+2\times1-1\times4|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=0$$

所以 $\theta=\frac{\pi}{2}$,即直线 L_1 与 L_2 相互垂直.

如果已知直线 L 与平面 π 不垂直,直线 L 和它在平面 π 上的投影直线的夹角 $\varphi(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2})$ 称为直线 L 与平面 π 的夹角(如图 8-4-3 所示).如果已知直线 L 与平面 π 垂直,那么它们之间的夹角就为$\frac{\pi}{2}$.

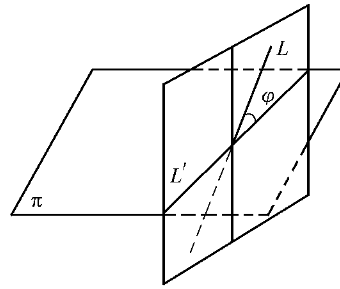


图 8-4-3

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$,平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,因为直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的夹角为$\frac{\pi}{2}-\varphi$或$\frac{\pi}{2}+\varphi$,又因为

$$\sin\varphi=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\left|\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi)\right|$$

所以

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{8-4-5}$$

因为直线与平面平行相当于直线的方向向量与平面的法向量垂直,所以直线与平面平行相当于

$$Am+Bn+Cp=0$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法向量平行,所以直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

例 4 求过点(1,2,3)并与平面 $x-3y+2z+1=0$ 垂直的直线方程.

解 因为所求直线垂直于已知平面,所以直线方向向量与平面法向量平行.而(1,-3,2)为已知平面的法向量,故所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{2}$$

第五节　曲 面 方 程

一、曲面方程的基本概念

我们把任何曲面都理解为满足一定条件的点的几何轨迹.若曲面 $\sum$ 上的点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 $\sum$ 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$，则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 $\sum$ 的方程，而曲面 $\sum$ 就称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

方程 $F(x,y,z)=0$ 有时也记作 $z=f(x,y)$.

平面是曲面的特殊情形，它的方程是关于 x,y,z 的一次方程，即 $Ax+By+Cz+D=0$，而本节所讨论的是一些常见的用 x,y,z 的二次方程所表示的曲面，这类常见的曲面称为**二次曲面**.

二、母线平行于坐标轴的柱面

直线 L 沿定曲线 C 平行移动所形成的曲面称为**柱面**.定曲线 C 称为**柱面的准线**，动直线 L 称为**柱面的母线**(如图 8-5-1 所示).

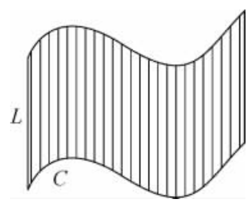


图 8-5-1

下面我们只讨论准线在坐标面上，而母线垂直于该坐标面的柱面.

例 1　设一个圆柱面的母线平行于 x 轴，准线 C 是 xOy 平面上以原点为圆心、R 为半径的圆.在平面直角坐标系中，准线 C 的方程为 $x^2+y^2=R^2$，求该圆柱面的方程.

解　在圆柱面上任取一点 $M(x,y,z)$，过点 M 的母线与 xOy 平面的交点 $(x,y,0)$ 一定在准线 C 上(如图 8-5-2 所示)，所以不论点 M 的坐标中的 z 取什么值，它的横坐标 x 和纵坐标 y 必定满足方程 $x^2+y^2=R^2$.反之，不在圆柱面上的点，它的坐标不满足这个方程，于是所求圆柱面的方程为 $x^2+y^2=R^2$.

应当注意，在平面直角坐标系中，方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示一个圆，而在空间直角坐标系中，方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示一个母线平行于 z 轴的圆柱面.

一般地，如果柱面的准线是 xOy 面上的曲线 C，它在平面直角坐标系中的方程为 $f(x,y)=0$，ī　　，以 C 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程就是 $f(x,y)=0$.

类似地，方程 $g(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面，方程 $h(x,z)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面.

这就是说，在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下，含两个变量的方程为柱面方程，并且方程中缺哪个变量，该柱面的母线就平行于哪个坐标轴.

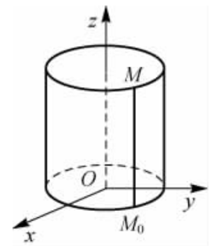


图 8-5-2

例 2 试确定方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$x^2-2py=0(p>0)$ 分别表示什么样的二次曲面？

解 根据前面的结论，三个方程中均缺少变量 z，所以它们分别表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面（如图 8-5-3 所示）、双曲柱面（如图 8-5-4 所示）和抛物柱面（如图 8-5-5 所示）.

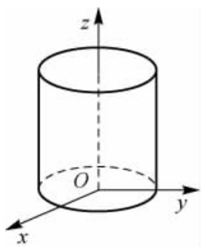


图 8-5-3

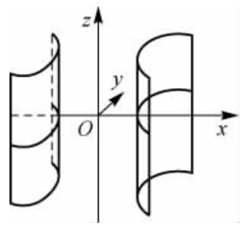


图 8-5-4

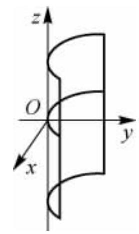


图 8-5-5

三、旋转曲面

一平面曲线 C 绕同一平面上的一条定直线 L 、 所形成的曲面称为**旋转曲面**. 曲线 C 称为**旋转曲面的母线**，直线 L 称为**旋转曲面的轴**.

例 3 设在 yOz 平面上有一条已知曲线 C，它在平面直角坐标系中的方程是 $f(y,z)=0$，求此曲线 C 绕 z 轴、 一周所形成的、 曲面的方程.

解 在、 曲面上任取一点 $M(x,y,z)$，设该点是由母线上的点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴、 一定角度而得到的. 由图 8-5-6 可知，点 M 与 z 轴的距离等于点 M_1 与 z 轴的距离，且有同一竖坐标，即 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$，$z=z_1$，又因为点 M_1 在母线 C 上，所以 $f(y_1,z_1)=0$，于是有

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

、 曲面上的点都满足这一方程，而不在、 曲面上的点都不满足该方程，故此方程是母线为 C，、 轴为 z 轴的、 曲面的方程. 可见，只要在 yOz 坐标面上曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中，将 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，就得到曲线 C 绕 z 轴、 的、

曲面方程.

同理,曲线 C 绕 y 轴、　的、　曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

对于其他坐标面上的曲线,绕该坐标面上任何一条坐标轴、　所生成的、　曲面,其方程可以用上述类似方法求得.

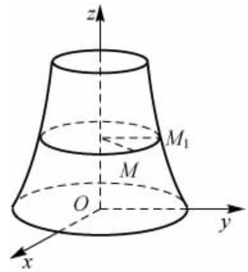


图 8-5-6

例 4　求由 yOz 平面上的直线 $z=ky(k>0)$ 绕 z 轴旋转所形成的、　曲面的方程.

解　在 $z=ky$ 中,把 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,得所求方程为

$$z=\pm k\sqrt{x^2+y^2}$$

即

$$z^2=k^2(x^2+y^2).$$

此曲面为顶点在原点,对称轴为 x 轴的圆锥面(如图 8-5-7 所示).

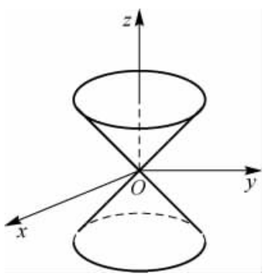


图 8-5-7

四、二次曲面

我们已经知道,在空间直角坐标系中,平面称为一次曲面,若曲面的方程是二次方程,则它的图形称为二次曲面.对于曲面方程的研究,我们一般采用平行于坐标面的平面去截曲面,求得一系列的交线,对这些交线进行分析,就可以看出曲面的轮廓,这种方法称为**截痕法**.下面我们运用这种方法讨论椭圆抛物面的具体形状.

由方程 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z(p>0,q>0)$ 所表示的曲面称为**椭圆抛物面**.

由所给方程可知,$z\geqslant 0$,故曲面在水平平面下方无图形.

用水平平面 xOy 去截曲面,截痕是一点 $(0,0,0)$,称为椭圆抛物面的顶点.

用平行于 xOy 坐标面的平面 $z=h(h>0)$ 截此曲面,其交线为 $z=h$ 平面上的椭圆,且当 h 增大时,椭圆的半轴也随之增大.

若用平面 $x=h$ 或 $y=h$ 截曲面,其交线分别为抛物线.

综合上面的讨论,椭圆抛物面的形状如图 8-5-8 所示.

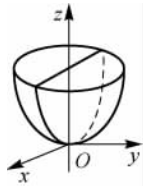


图 8-5-8

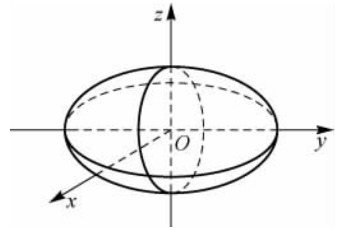


图 8-5-9

当 $p=q$ 时,原方程比为 $x^2+y^2=2pz$,它是由抛物线绕 z 轴、　而成,称为**旋转抛物面.**

用同样的方法我们还可以分析椭球面(如图 8-5-9 所示).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0);$$

单叶双曲面(如图 8-5-10 所示)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0);$$

双叶双曲面(如图 8-5-11 所示)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1(a>0,b>0,c>0).$$

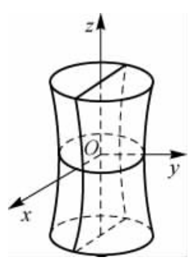


图 8-5-10

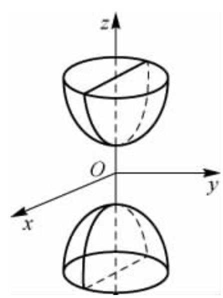


图 8-5-11

第六节　空间曲线及其方程

一般来说，空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设这两个曲面 S_1，S_2 的方程分别为

$$F(x,y,z)=0 \quad \text{及} \quad G(x,y,z)=0$$

这两个曲面的交线为 C（如图 8-6-1 所示）. 由于曲线 C 上的任意一点同时在曲面 S_1，S_2 上，因此，曲线 C 上任意一点的坐标必同时满足这两个曲面的方程，即满足

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\} \tag{8-6-1}$$

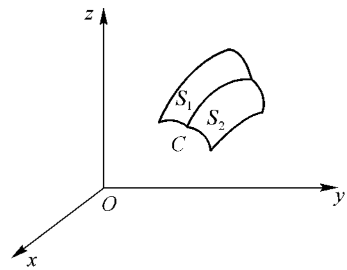


图 8-6-1

反之，如果点 P 不在曲线 C 上，那么它不可能同时在两个曲面上，它的坐标也不可能满足方程组(8-6-1). 因此，曲线 C 可以用方程组(8-6-1) 来表示，方程组(8-6-1) 又称为空间曲线 C 的一般方程.

例 1　方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ (x-1)^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?

解　方程组中第一个方程表示以坐标原点(0,0,0) 为球心，1 为半径的球面；第二个方程表示以 x 轴上点(1,0,0) 为球心，1 为半径的球面，这两个方程组成的方程组表示上述这两个球面的交线.

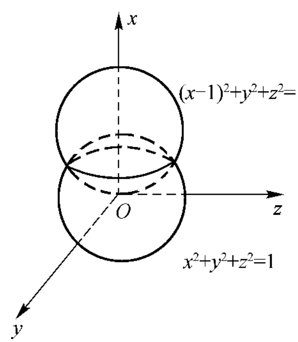


图 8-6-2

事实上，方程组相当于

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ (x-1)^2=x^2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{3}{4} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

表示一个在平面 $x=\dfrac{1}{2}$ 上，圆心为$\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$，半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的圆，如图 8-6-2 所示.

例 2　方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1 \end{cases}$表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示以坐标原点(0,0,0)为球心,以2为半径的球面;第二个方程表示经过点(0,0,1)并与 xOy 平面平行的一个平面,这两个方程组成的方程组表示上述这两个球面的交线.

原方程组相当于

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases},$$

表示一个在平面 $z=1$ 上,圆心在(0,0,1)上,半径为$\sqrt{3}$的圆,如图8-6-3所示.

如图8-6-3所示,包含曲线 S:

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$$

且母线平行于 z 轴的柱面

$$x^2+y^2=3$$

称为曲线 S 投影到 xOy 平面的**投影柱面**;而曲线 S':

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=0 \end{cases}$$

称为曲线 S 在 xOy 平面上的**投影曲线**.

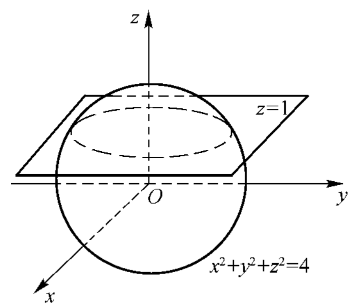


图 8-6-3

一般地,从表示空间曲线 S 的方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

中消去 z,得到

$$\Phi(x,y)=0$$

便是曲线 S 投影到 xOy 平面的投影柱面方程;而方程组

$$\begin{cases} \Phi(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

便是空间曲线 S 投影到 xOy 平面的投影曲线方程.类似地,还可以分别得到空间曲线 S 投影到 yOz,zOx 平面的投影柱面方程及投影曲线方程.

将

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去 x,可得到

$$\Psi(y,z)=0$$

则 $\Psi(y,z)=0$ 便是空间曲线 S 投影到 yOz 平面的投影柱面方程,而

$$\begin{cases} \Psi(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

为空间曲线 S 投影到 yOz 平面的投影曲线方程.

将

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去 y,可得到

$$\Omega(x,z)=0$$

则 $\Omega(x,z)=0$ 便是空间曲线 S 投影到 zOx 平面的投影柱面方程,而

$$\begin{cases} \Omega(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

为空间曲线 S 投影到 zOx 平面的投影曲线方程.

思考　将空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=4 \\ z=2 \end{cases}$ 投影到 xOy 平é　,试求投影柱面方程及投影曲线方程.

与平面曲线的参数方程一样,空间曲线也能用参数方程来表示,其一般形式为

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t) \\ y&=y(t)\quad (t\text{ 为参数}) \\ z&=z(t) \end{aligned}\right\} \tag{8-6-2}$$

设空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转,同时又以线速度 v 沿平行于 x 轴的正方向上升,其中 ω 和 v 都是常数,则点 M 的轨迹被称为圆柱螺线或螺旋线.

取时间 t 为参数建立参数方程.

设 $t=0$ 时,动点在 x 轴上的一点 $A(a,0,0)$ 处,在时刻 t 时,动点在点 $M(x,y,z)$ 处(如图 8-6-4 所示).由题设,动点 M 在 xOy 平面上的投影 M' 做匀速圆周运动,它在时刻 t 时转角 $\theta=\omega t$,又点 M 向上做匀速直线运动,因此有

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t\quad (t\geqslant 0) \\ z=vt \end{cases}$$

这就是螺旋线的参数方程.

平头螺丝钉就是这种曲线.螺旋线有个重要的特性,当转角 θ 从 θ_0 变到 $\theta_0+\alpha$,z 由 $b\theta_0$ 变到 $b\theta_0+b\alpha$.这说明当 OM' 转过角 α 时,M 点沿螺旋线上升了高度 $b\alpha$,即上升的高度与 OM' 转过角度成正比.特别是当 OM' 转过一周时,即 $\alpha=2\pi$ 时,M 点就上升了高度 $2\pi b$,这个高度在工程技术上称为螺距.

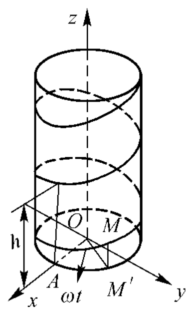


图 8-6-4

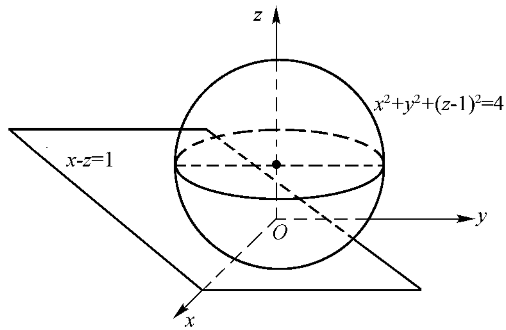


图 8-6-5

例 3　方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?将曲线方程用参数方程表示.

解　方程组中第一个方程表示以(0,0,1)为球心,2 为半径的球面;第二个方程表示经过(0,0,−1)点并与 y 轴平行的一个平面,它们的交线如图 8-6-5 所示.

将第二个方程中的 $z = x - 1$ 代入第一个方程,可得

$$x^2 + y^2 + (x-2)^2 = 4$$

即

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

令

$$x = 1 + \cos t,\quad y = \sqrt{2}\sin t,\quad t \in [0, 2\pi]$$

代入平面方程,可得

$$z = \cos t$$

所以曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \\ z = \cos t \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

第九章　无 穷 级 数

无穷级数是高等数学课程的重要内容之一，它在函数的研究以及近似计算等方面都有非常广泛的应用. 本章将介绍数项级数的基本知识、幂级数的一些基本结论，以及函数展开成幂的方法和应用.

第一节　数项级数的概念和性质

一、数项级数的概念

人们认识事物在数量方面的特性，往往是一个由近似到精确的过程，在这种认识过程中，会遇到由有限个数量相加到无穷多个数量相加的问题.

例如，约在公元前 300 年，中国古代经典著作《庄子 · 天下篇》中提出过如下命题："一尺之棰，日取其半，万世不竭."如果用数学方式来表示此命题，可以写作

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

此式说明常数 1 可以用

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

来表示，即无穷多项的连加.

又如，计算圆的面积. 若已求得正六边形的面积为 a_1，则正十二边形的面积为 a_1+a_2，如图 9-1-1 所示.

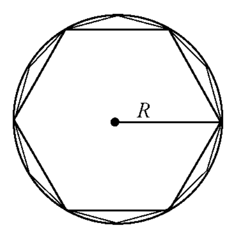


图 9-1-1

依此类推，可得正 3×2^n 边形的面积为

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

则圆的面积 $A\approx a_1+a_2+\cdots+a_n$.

如果内接正多边形的边数无限增多，即 n 无限增大，那么

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

的极限就是所要求的圆面积 A. 这时和式中的项数无限增多，于是出现了无穷多个数量依次相加的数学式子.

由上面两个例子,引入级数的概念.

定义 1 如果给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$$

则由该数列构成的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{9-1-1}$$

称为(数项)无穷级数,简称**(数项)级数**.

其中第 n 项 u_n 称为级数的**一般项(或通项)**.

上述级数的定义只是形式上的定义,无穷多个项依次相加,其和是否存在?下面给出无穷级数和的概念.

定义 2 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ 的前 n 项和为

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

称 s_n 为级数的**部分和**.

当 n 无限增大时,如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s,即

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s,这时极限 s 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和,并写成

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果 $\{s_n\}$ 没有极限,则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 即数项级数收敛(发散)的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ 存在(不存在).

当级数收敛时,其部分和 s_n 是级数的和 s 的近似值,称它们之间的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$$

为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项. 用近似值 s_n 代替和 s 所产生的误差是这个余项的绝对值,即误差是 $|r_n|$. 显然,$\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$.

例 1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

解　当 $|q| \neq 1$ 时，部分和为

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

(1) 若 $|q| < 1$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$；

(2) 若 $|q| > 1$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$，所以当 $|q| > 1$ 时，等比级数发散.

当 $q = 1$ 时，级数的部分和为 $s_n = na$. 当 $n \to \infty$，$s_n \to \infty$ 时，级数发散.

当 $q = -1$ 时，级数的部分和为 $s_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ a(a \neq 0), & n \text{ 为奇数} \end{cases}$. 当 $n \to \infty$ 时，部分和数列没有极限，所以级数发散.

综合上述结果，当 $|q| < 1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛；当 $|q| \geqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

由例1可以得出如下结论：当 $|q| < 1$ 时，等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛，且极限为 $\frac{a}{1-q}$. 该极限在后面的运算中非常有用. 当 $|q| \geqslant 1$ 时，等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

例 2　证明无穷级数 $\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$ 是收敛的，并求出该级数的和.

解　因为　$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

所以

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

所以这个级数收敛，它的和为 $\frac{1}{2}$.

二、数项级数的基本性质

根据无穷级数的收敛和发散的定义，可以得到无穷级数的下列基本性质.

性质 1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 也收敛，其中 C 为常数，且若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

$=S$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Cu_n=CS$.

性质2 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，且若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=S\pm\sigma$.

性质3 一个级数若增加或减少有限项，得到的新级数其敛散性不变. 但对于收敛的级数，增加或减少有限项，在一般情况下尽管仍然收敛，但其和要改变.

性质4 如果$u_n\leqslant v_n\leqslant \omega_n$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega_n$都收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也收敛.

性质5（级数收敛的必要条件） 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，由于$u_n=S_n-S_{n-1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

应当注意，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$只是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件，而不是充分条件，因此，不能由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$得出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的结论. 例如，调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，虽有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但它却是发散的.

推论 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的一般项$u_n$在$n\to\infty$时不趋于零，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是发散的.

例3 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n}\right)$的敛散性.

解 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$分别是公比为$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{5}$的等比数列，它们都是收敛的，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}.$$

由性质2知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n}\right)$收敛，且其和为$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

例4 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-5}$的敛散性.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-5}=\dfrac{1}{2}\neq 0$,由性质 5 可知,已知的级数发散.

第二节 正项级数及其敛散性

一、正项级数

正项级数是数项级数中比较简单,但又很重要的一种类型.

定义 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$中的每一项都是非负数,即$u_n \geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$,则称此级数为**正项级数**.

例如,以下级数均为正项级数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^n$.

对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,因为$u_n \geqslant 0$,则有$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}\geqslant S_n$,这说明正项级数的部分和数列$\{S_n\}$是单调递增的,故可得正项级数的收敛原理.

定理 1 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是部分和数列$\{S_n\}$有界.

例 1 判定正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{2^n}$的敛散性.

解 由于该级数为正项级数,且部分和

$$S_n=\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{2}+\frac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{4}+\frac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{8}+\cdots+\frac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}<1.$$

即部分和数列$\{S_n\}$有界,因此正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{2^n}$收敛.

二、正项级数的审敛法

定理 1 的重要性不是在于利用它直接判定正项级数敛散性，而是在于它是下面几个判别法的基础.

定理 2（比较审敛法） 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数.

（1）若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，且 $u_n \leqslant v_n$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $v_n \geqslant u_n$，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 .

证 （1）设级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛于和σ，因为 $u_n \leqslant v_n$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leqslant \sigma$$

即部分和数列有界，故$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 .

（2）设 $s_n \to \infty (n \to \infty)$ 且 $u_n \leqslant v_n$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和$\sigma_n \geqslant s_n$ 且$\sigma_n \to \infty$ 不是有界数列，所以$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 .

推论 1 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，且存在自然数 N，使当 $n \geqslant N$ 时，有 $u_n \leqslant kv_n (k > 0)$ 成立，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，且当 $n \geqslant N$ 时，有$u_n \geqslant kv_n (k > 0)$ 成立，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 2 讨论 p－级数 $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots (p > 0)$ 的敛散性，p－级数的图形如图9-2-1 所示.

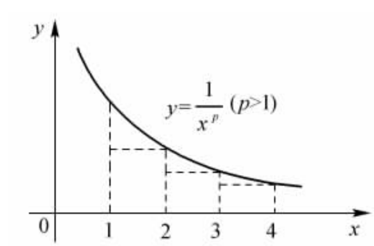


图 9-2-1

解 当 $p \leqslant 1$ 时，因为$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$，又知调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，根据比较判别法，则 p－级数发散 .

设 $p > 1$，由图 9-2-1 知 $n-1 \leqslant x \leqslant n$ 时，

$$\frac{1}{n^p} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^p}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leqslant 1 + \int_1^2 \frac{dx}{x^p} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^p} = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p}$$

$$= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1}$$

即$\{s_n\}$有界，则 $p-$级数收敛．

综合上述结果，得到下面结论：当 $p > 1$ 时，$p-$级数收敛；当$p \leqslant 1$ 时，$p-$级数发散．

例 3　判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3}}$的敛散性.

解　因为$\sqrt{1+n^3} > \sqrt{n^3} = n^{\frac{3}{2}}$，所以 $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^3}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$.

由 $p-$级数可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛.

根据定理 2 可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3}}$收敛.

比较审敛法是一基本方法，虽然有用，但应用起来却有许多不便，因为它需要建立定理所要求的不等式，而这种不等式常常不易建立，为此介绍在应用上更为方便的极限形式的比较审敛法.

定理 3（比较审敛法的极限形式）　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，则有：

（1）当 $0 < l < +\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性；

（2）当 $l = 0$ 时，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（3）当 $l = +\infty$ 时，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 4　判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$的敛散性.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1$$

又知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，根据定理 3 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$收敛．

例 5 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n-3^n}$的敛散性.

解 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{5^n-3^n}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n}=1$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$是收敛的等比级数，由定理 3 可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n-3^n}$收敛.

将所给正项级数与 $p-$级数作比较，可得较方便实用的极限审敛法.

推论 2（极限审敛法） 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，如果$\lim_{n\to\infty}nu_n=l>0$（或$\lim_{n\to\infty}nu_n=+\infty$），则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；如果有 $p>1$，使得$\lim_{n\to\infty}n^p u_n=l(0\leqslant l<+\infty)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

例 6 判定下列级数的敛散性.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{n(2n+1)(2n-1)}$.

解 （1）$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛，根据定理 3 可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$收敛.

（2）$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{4n-3}{n(2n+1)(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-3n^2}{n(2n+1)(2n-1)}=1$

由推论 2 可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{n(2n+1)(2n-1)}$收敛.

定理 4（比值审敛法，达朗贝尔判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则有：

（1）当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

（2）当 $\rho>1$（或$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$）时，级数发散；

（3）当 $\rho=1$ 时，不能用此判别法确定其敛散性.

比值审敛法的优点是不必找参考级数，直接从级数本身的构成，利用通项来判定其敛散性.

注意　(1) 当 $\rho=1$ 时，比值审敛法失效. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

(2) 此判别法是充分非必要条件. 例如：

$$u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}\leqslant\frac{3}{2^n}=v_n$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛，但

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)}=a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{3}{2}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在 .

例 7　判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\times 2n}$.

解　(1) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty)$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛 .

(2) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\frac{n+1}{10}\to\infty(n\to\infty)$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散 .

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\times 2n}{(2n+1)(2n+2)}=1$，比值审敛法失效，改用比较审敛法.

因为 $\frac{1}{(2n-1)\times 2n}<\frac{1}{n^2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot(2n-1)}$ 收敛 .

定理 5(根值审敛法，柯西判别法)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则有：

(1) 当 $\rho<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $\rho>1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$) 时,级数发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时,不能用此判别法确定其敛散性.

例 8 判断正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^3\left(\dfrac{5}{n}\right)^n$的敛散性.

解 令 $u_n=(n+1)^3\left(\dfrac{5}{n}\right)^n$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)^3\left(\frac{5}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\sqrt[n]{(n+1)^3}=0<1$$

由定理 5 知该级数收敛.

第三节 任意项级数及其敛散性

在数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$中,如果 u_n 为任意实数,则称该级数为**任意项级数**. 任意项级数是较为复杂的数项级数,在这类级数中,比较重要的是交错级数.

一、交错级数

定义 1 如果在任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$中,正负号相间出现,这样的任意项级数称为**交错级数**. 它的一般形式是

$$u_1-u_2+u_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots,$$

其中 $u_n>0(n=1,2,3\cdots)$.

对于交错级数的剑散性,我们有如下判定方法:

定理 1(莱布尼茨审敛法) 设交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足:

(1)$u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛,且其和 $S\leqslant u_1$(证明从略).

例 1 判定交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$的敛散性.

解 由$\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$知 $u_n\geqslant u_{n+1}$,又$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,

所以，由莱布尼茨审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$是收敛的.

例 2　判定交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n^2}$的敛散性.

解　为了确认级数满足$u_n \geqslant u_{n+1}$，我们可设函数$f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$，因为

$$f'(x)=\frac{2(1-x)}{x^3}$$

所以当$x\geqslant 1$时，$f'(x)\leqslant 0$，即函数$f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$是单调减少的，由此可以推得

$$\frac{2n-1}{n^2}\geqslant\frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2}(n=1,2,3,\cdots)$$

即

$$u_n \geqslant u_{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2}=0$，

所以，由莱布尼茨审敛法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n^2}$的是收敛的.

二、绝对收敛与条件收敛

定义 2　对任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\sum\limits_{n\to 0}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为**绝对收敛**；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为**条件收敛**.

例如，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$绝对收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$是条件收敛级数.

级数绝对收敛与级数收敛有以下重要关系：

定理 2　若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必定收敛.

证　令

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad(n=1,2,\cdots)$$

显然$v_n\geqslant 0$，且$v_n\leqslant|u_n|$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛. 又有

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

由定理 2 可以知道，对于一般的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，如果用正项级数的审敛法判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则此级数收敛. 这就使得很大一部分级数的收敛性判定问题，转化成为正项级数的收敛性判定问题.

例 3 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性 .

解 由于 $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛，故该级数绝对收敛，则由定理 2 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ 收敛.

例 4 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3 \times 2^n}$ 是否收敛. 如果是收敛的，判别是绝对收敛还是条件收敛.

解
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{3}} = \frac{1}{2}$$

由根值审敛法知该级数绝对收敛. 由定理 2 知，该级数收敛.

例 5 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n+2)(3n-2)}}$ 是否收敛. 如果是收敛的，判别是绝对收敛还是条件收敛.

解 由于 $\left|(-1)^{n+1} \dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n+2)(3n-2)}}\right| > \left|\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{3n}\right| > \left|\dfrac{\ln 2}{3n}\right|$

故由比较审敛法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n+2)(3n-2)}}\right|$$

发散. 又

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n+2)(3n-2)}} = 0$$

显然
$$\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n+2)(3n-2)}}$$

递减.

由莱布尼茨定理知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(2+\frac{1}{n})}{\sqrt{(3n+2)(3n-2)}}$$

收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(2+\frac{1}{n})}{\sqrt{(3n+2)(3n-2)}}$$

条件收敛.

第四节　幂级数

一、函数项级数

定义 1　设 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 是定义在数集 I 上的一个函数数列，则表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{9-4-1}$$

称为定义在 I 上的函数项级数，I 称为它的定义域. 例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$$

都是函数项级数.

对于定义域 I 中任意给定某个特定值 x_0，则函数项级数式(9-4-1)就成为一个常数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$$

如果这个常数项级数收敛，则称点 x_0 为函数项级数式(9-4-1)的**收敛点**；如果这个常数项级数发散，则称点 x_0 为函数项级数式(9-4-1)的**发散点**. 函数项级数的所有收敛点(发散点)组成的集合称为该函数项级数的**收敛域(发散域)**.

设函数项级数的收敛域为 D，对任意 $x\in D$，级数式(9-4-1)收敛，于是存在一个与 x 有关的确定的函数，记为 $s(x)$，称为级数式(9-4-1)的和函数，即有

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

和函数 $s(x)$ 的定义域就是函数项级数的收敛域. 如果用 $S_n(x)$ 表示数项级数的前 n 项部分和，即

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),$$

则在收敛域上，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=s(x).$$

如果记 $r_n(x)=s(x)-S_n(x)$，则称 $r_n(x)$ 为函数项级数式(9-4-1)的余项，在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0.$$

二、幂级数

形如
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

的级数称为 x 或$(x-x_0)$的**幂级数**. 其中，常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 称为**幂级数的系数**.

例如，

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

都是幂级数.

例 1 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$，由本章第一节例 1 知，当 $|x|<1$ 时，此级数收敛；当$|x|\geqslant 1$ 时，此级数发散. 因此，该幂级数的收敛域为$(-1,1)$；发散域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

由此可知，这个幂级数的收敛域是一个区间. 事实上，这个结论对于一般的幂级数也是成立的，于是有如下定理.

定理 1(阿贝尔定理) 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0$($x_0\neq 0$)处收敛，则它在满足不等式 $|x|<|x_0|$的一切 x 处绝对收敛；如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0$ 处发散，则它在满足不等式 $|x|>|x_0|$的一切 x 处发散.

证 (1) 由$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0{}^n$ 收敛，知$\lim\limits_{n\to\infty}a_nx_0{}^n=0$，存在 M，使得

$$|a_nx_0{}^n|\leqslant M\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$|a_nx^n|=\left|a_nx_0{}^n\cdot\frac{x^n}{x_0^n}\right|=|a_nx_0{}^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

因为当$\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$时,等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$收敛,故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$收敛,即级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$收敛．因此,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ $|x|<|x_0|$在一切x处绝对收敛.

(2) 假设当$x=x_0$时发散,而有一点x_1适合$|x_1|>|x_0|$使级数收敛,由(1)结论则级数当$x=x_0$时应收敛,这与所假设条件矛盾,故如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$在$x=x_0$处发散,则它在满足$|x|>|x_0|$的一切$x$处发散.

给出的幂级数在数轴上既有收敛点(不仅是原点)又有发散点.如果从原点沿着数轴向右,最初只遇到收敛点,然后只遇到发散点,这两部分的分界点可能是收敛点也可能是发散点.从原点沿着数轴向左的情形也是如此.由定理1可以证明左右分界点到原点的距离是一样的,如图9-4-1所示.在图9-4-1中,$R(R>0)$是分界点.

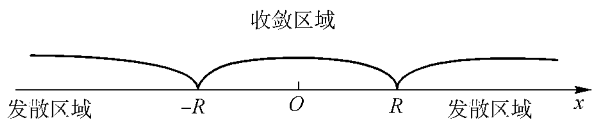


图 9-4-1

推论　如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$不是仅在$x=0$一点收敛,也不是在整个数轴上都收敛,则必有一个完全确定的正数R存在,它具有下列性质:

(1) 当$|x|<R$时,幂级数绝对收敛;

(2) 当$|x|>R$时,幂级数发散;

(3) 当$x=R$与$x=-R$时,幂级数可能收敛也可能发散.

正数R通常称为幂级数的**收敛半径**,$(-R,R)$称为幂级数的**收敛区间**.

再由幂级数在$x=R$与$x=-R$处的收敛性就可以决定它的收敛域是$(-R,R)$,$[-R,R)$,$(-R,R]$,$[-R,R]$这四个区间之一.

规定

(1) 幂级数只在$x=0$处收敛,$R=0$,收敛区间为$x=0$;

(2) 幂级数对一切x都收敛,$R=+\infty$,收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

如何求幂级数的收敛半径?我们有下面定理:

定理2　如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$的所有系数$a_n\neq 0$,设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$),则有:

(1) 当$\rho\neq 0$时,$R=\frac{1}{\rho}$;

（2）当 $\rho=0$ 时，$R=+\infty$；

（3）当 $\rho=+\infty$ 时，$R=0$.

证 对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 应用比值审敛法.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|=\rho|x|$$

（1）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho(\rho\neq 0)$ 存在，由比值审敛法知：

当 $|x|<\dfrac{1}{\rho}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛.

当 $|x|>\dfrac{1}{\rho}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 发散，并且从某个 n 开始，$|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_nx^n|$，$|a_nx^n|\nrightarrow 0$，从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散，收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

（2）如果 $\rho=0$，对任意 $x\neq 0$，有 $\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}\to 0(n\to\infty)$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛，收敛半径 $R=+\infty$.

（3）如果 $\rho=+\infty$，对任意 $x\neq 0$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 必发散（否则由定理 1 知将有点 $x\neq 0$ 可使 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛），收敛半径 $R=0$.

例 2 求下列幂级数的收敛半径及收敛域.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\dfrac{1}{2})^n$.

解 （1）$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$

则 $R=1$. 当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，该级数收敛；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，

该级数发散.故收敛域是$(-1,1]$.

$$(2)\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$$

则 $R=0$,级数只在 $x=0$ 处收敛.

$$(3)\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

则 $R=+\infty$,故收敛域是$(-\infty,+\infty)$.

$$(4)\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2$$

则 $R=\frac{1}{2}$,即 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ 收敛,故 $x\in(0,1)$ 时收敛.

当 $x=0$ 时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$,发散;当 $x=1$ 时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,收敛.故收敛域为$(0,1]$.

例 3 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域.

解 因为级数
$$\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{2^3}+\cdots$$
缺少偶次幂的项,应用达朗贝尔判别法,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^{2n-1}}{2^n}}\right|=\frac{1}{2}|x|^2$$

当$\frac{1}{2}x^2<1$,即$|x|<\sqrt{2}$ 时,级数收敛;当$\frac{1}{2}x^2>1$,即$|x|>\sqrt{2}$ 时,级数发散;当 $x=\sqrt{2}$ 时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$,级数发散;当 $x=-\sqrt{2}$ 时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$,级数发散.故原级数的收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

三、幂级数的性质

性质 1 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2,$R=\min\{R_1,R_2\}$,则在$(-R,R)$内,幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$ 收敛,且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

性质 2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$，则和函数 $s(x)$ 具有下列性质：

(1) $s(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续；

(2) $s(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，且 $s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$，即幂级数在收敛区间内可以逐项求导；

(3) $s(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可积，且

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

即幂级数在收敛区间内可以逐项积分.

例 4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ 的和函数.

解 把级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，当 $|x|<1$ 时看成公比为 x 的收敛等比级数，则得

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1).$$

因为收敛区间是关于原点对称的区间，所以 $-x$ 也在收敛区间内，用 $-x$ 代换级数中的 x，显然可以得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}, x\in(-1,1)$$

将上面的两个级数相加得

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}, x\in(-1,1),\text{即}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}, x\in(-1,1).$$

例 5 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的和函数.

解 将级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$ 两端积分得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x)=\ln\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1).$$

令 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，两端求导得

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1)$$

(其中$\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\dfrac{1}{1+x^2}$,相当于将$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)x^n=\dfrac{1}{1+x}$中的$x$代换成$x^2$)

两端积分得

$$s(x)=\arctan x,x\in(-1,1)$$

即
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\arctan x,x\in(-1,1)$$

将$x=\pm 1$分别代入此级数,级数均收敛,故其收敛域为$[-1,1]$.

例 6　求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$的和函数.

解　由例 3 可知此级数的收敛区间是$(-\infty,+\infty)$,令其和函数为$y=f(x)$,即$y=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$,则有

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=y,$$

解此微分方程得$y=Ce^x$.

再注意到$f(0)=1$,即得$C=1$,所以和函数$y=e^x$,即

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

第五节　函数的幂级数展开

一、泰勒级数

1. 泰勒公式

第四节例题中已知幂级数来求它的和函数,但是在许多应用中,遇到的却是相反的问题:给定函数$f(x)$,要Ж　它是否能在某个区间内"展开成幂级数",也就是说,是否能找到这样的一个幂级数,它在某区间内收敛,且其和恰好就是给定的函数$f(x)$,如果能找到这样的幂级数,就说函数$f(x)$在该区间内能展开成幂级数. 也就是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

根据要解决的问题提出下列问题:

(1) 如果能展开,a_n 是什么?

(2) 展开式是否唯一?

(3) 在什么条件下才能展开成幂级数?

对于问题(1) 和(2),有下面定理.

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在某个邻域内具有任意阶导数,且在某个邻域内能展开成$(x-x_0)$ 的幂级数,即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

则其系数为

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

且展开式是唯一的.

证 因为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在某个邻域内收敛于 $f(x)$,即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

逐项求导,得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots$$

……

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots 3\cdot 2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$

……

令 $x=x_0$,即

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

称之为**泰勒系数**.

泰勒系数是唯一的,所以 $f(x)$ 的展开式是唯一的.

为了解决上面的问题(3),先介绍泰勒公式.

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某个邻域内具有 $n+1$ 阶导数,则在 x 与 x_0 之间存在一点 ξ,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}\tag{9-5-1}$$

成立.

公式(9-5-1) 称为**函数 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒公式**,简称为 **n 阶泰勒公式**.

公式中的前 $n+1$ 项

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒多项式，它是 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式. 公式(9-5-1)中的最后一项 $\frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 称为**函数 $f(x)$ 的泰勒余项**，记作 $R_n(x)$，即

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间. 当用 n 次泰勒多项式代替 $f(x)$，其误差就是泰勒余项的绝对值，即 $|R_n(x)|$.

当 $x_0=0$ 时，则有**麦克劳林公式**

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$，$\xi$ 在 0 与 x 之间.

2. 泰勒级数

定义　如果 $f(x)$ 在点 x_0 某个邻域内具有任意阶导数，则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒级数**，记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 处的**麦克劳林级数**(简称**麦氏级数**).

例如，$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处任意可导，且 $f^{(n)}(0)=0(n=0,1,2,\cdots)$，所以 $f(x)$ 的麦氏级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^n$.

该级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内和函数 $s(x)\equiv 0$，可见除 $s=0$ 外，$f(x)$ 的麦氏级数处处不收敛于 $f(x)$.

下面定理回答了在什么条件下，函数 $f(x)$ 可以展开成它的泰勒级数.

定理 3　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒级数公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

证 必要性：设 $f(x)$ 能展开为泰勒级数．由

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x)$$

则
$$R_n(x) = f(x) - s_{n+1}(x)$$

因为
$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = f(x)$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - s_{n+1}(x)] = 0$$

充分性：由于

$$f(x) - s_{n+1}(x) = R_n(x)$$

则
$$\lim_{n\to\infty}[f(x) - s_{n+1}(x)] = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

即
$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = f(x)$$

故 $f(x)$ 的泰勒级数收敛于 $f(x)$.

定理3说明了，当 $f(x)$ 满足定理3的条件时，$f(x)$ 的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在点 x_0 的某个邻域内收敛于 $f(x)$ 本身，称 $f(x)$ 在点 x_0 处可展开成泰勒级数，记为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{9-5-2}$$

此式称为**函数 $f(x)$ 的泰勒展开式**.

当 $x_0 = 0$ 时，$f(x)$ 为麦克劳林级数，记为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{9-5-3}$$

此式称为**函数 $f(x)$ 的麦克劳林展开式**.

二、函数展开成幂级数的方法

1. 直接展开法

利用麦克劳林公式将函数 $f(x)$ 展开成幂级数的方法，称为**直接展开法**.

例1 将函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 先求出 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 的各阶导数，再将 $x = 0$ 代入各阶导数中，得 $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)} = 1$

再将它们分别代入式(9-5-3)中，得

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \tag{9-5-4}$$

显然这个幂级数的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

至于级数式(9-5-4)是否以$f(x)=\mathrm{e}^x$为和函数,即它是否收敛于$f(x)=\mathrm{e}^x$,还要考察函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的麦克劳林公式中的余项.

因为

$$R_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

且$\theta x\leqslant|\theta x|<|x|$,所以$\mathrm{e}^{\theta x}<\mathrm{e}^{|x|}$,因而有

$$|R_n(x)|=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}<\frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

注意到,对任一确定的x值,$\mathrm{e}^{|x|}$是一个确定的常数,而级数式(9-5-4)是绝对收敛的,因此当$n\to\infty$时,$\frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}\to 0$,所以,当$n\to\infty$时,$\frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to 0$,由此可知

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

这表明级数式(9-5-4)确实收敛于$f(x)=\mathrm{e}^x$,因此有

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例2　将函数$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数.

解　由$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)(n=1,2,3,,\cdots)$可知

$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=-1,\cdots,$

$f^{(2n)}(0)=0,f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$

于是可以得到幂级数

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

因为所给函数的麦克劳林公式中的余项为

$$R_n(x)=\frac{\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

所以,可以推知

$$|R_n(x)|=\frac{\left|\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi\right)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此,得到$f(x)=\sin x$的幂级数展开式为

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

运用直接展开法将函数展开成幂级数的运算过于麻烦，因此人们常常采用**间接展开法**.

2. 间接展开法

从已知函数的展开式出发，利用幂级数的运算规则得到所求函数的展开式的方法称为间接展开法.

例 3　求函数 $f(x)=\cos x$ 的幂级数展开式.

解　因为 $(\sin x)'=\cos x$，所以可对

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

逐项求导，可得

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 4　将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解　因为 $\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$，所以将

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

两边同时积分，得

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

又因为幂级数逐项积分后收敛半径不变，所以上式右端级数的收敛半径仍为 $R=1$，而当 $x=-1$ 时该级数发散，当 $x=1$ 时该级数收敛，于是级数的收敛域为 $(-1,1]$.

例 5　将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解　令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，将其代入函数中，有 $f(x)=\frac{1}{1+t}$，先将函数 $\frac{1}{1+t}$ 展开成 t 的幂级数

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^n t^n+\cdots\quad t\in(-1,1),$$

再将上式中的 t 换成 $x-1$，得

$$\frac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots\quad x\in(0,2).$$

例 6　将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 x 的幂级数.

解　因为 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{2-x}$，且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-x}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right],x\in(-2,2)\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}\\&=(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)-\frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right]\\&=\frac{1}{2}+\frac{2^2-1}{2^2}x+\frac{2^3-1}{2^3}x^2+\cdots+\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n+\cdots\end{aligned}$$

根据幂级数和的运算法则，其收敛半径应取较小的一个，故 $R=1$. 因此，所得级数的收敛区间为$(-1,1)$.

第十章　线性代数基础

线性代数是从求解线性方程组等问题中发展起来的一门学科，它主要研究和解决具有线性关系的问题.本章重点来解决行列式、矩阵的概念与运算以及解线性方程组的相关问题.

第一节　行列式

一、二阶和三阶行列式

1.二阶行列式

在求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{10-1-1}$$

时，将 x_1 和 x_2 的四个系数组成的算式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 简记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

这个符号称为**二阶行列式**，其中的数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为该行列式的元素，每个横排称为行列式的行，每个竖排称为行列式的列.此时，a_{ij} 的第一个下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行，第二个下标 j 表示它位于从左到右的第 j 列，即 a_{ij} 是位于行列式第 i 行和第 j 列相交处的一个元素.

对于线性方程组(10-1-1)，若分别记

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{10-1-2}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

其中，式(10-1-2)等号右边的式子称为二阶行列式 Δ 的展开式. 则当 $\Delta\neq0$ 时，易验证它的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{10-1-3}$$

由此可见，二阶行列式就是对二元一次方程组中未知量 x_1,x_2 的系数和常数项这些元素之间的一种规定所得到的一个数值.

2. 三阶行列式

类似地，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{10-1-4}$$

为了简单地表达它的解，我们引进三阶行列式的概念，三阶行列式的展开式规定为：

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

三阶行列式也是一个数值，它可以通过转化为二阶行列式的计算而得到.

三阶行列式可以用来解三元一次方程组，若分别记三阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

如果方程组(10-1-4)中的系数行列式 $\Delta\neq0$，那么方程组有唯一解，其解可以简

洁地表示为：

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{10-1-5}$$

二、n 阶行列式

1. n阶行列式的概念

我们已经定义了二阶、三阶行列式，又将三阶行列式转化为二阶行列式来计算，一般地，可用递归法来定义 n 阶行列式.

定义 1 将 n^2 个数排列成 n 行 n 列，并在左、右两边各加一竖线的算式，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它代表一个由确定的运算关系所得到的数.

当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

当 $n>2$ 时，

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

其中数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**；M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式，

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{ij} 称为 a_{ij} 的**余子式**.

2.几种特殊的 n阶行列式

(1)对角行列式：只有在对角线上有非零元素的行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{10-1-6}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{10-1-7}$$

(2)下(上)三角行列式:主对角线以上(下)的元素都为零的行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{10-1-8}$$

三、行列式的性质

定义 2　将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式称为 D 的**转置行列式**,记作 D^{T}. 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

这个性质说明了行列式中行、列地位的对称性,凡是行列式对行成立的性质对列也成立.

性质 2 互换行列式的任意两行(或列),则行列式变号.

推论 1 若行列式两行(或列)的元素对应相等,则行列式的值为零.

性质 3 行列式某行(或列)元素都乘以数 k 等于用 k 乘以行列式.

推论 2 行列式某一行(或列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3 若行列式的某两行(或列)元素对应成比例,则行列式的值为零.

性质 4 如果行列式中某一行(或列)的所有元素都是两数之和,则这个行列式等于两个行列式的和,而且这两个行列式除了这一行(或列)外,其余的元素与原来行列式的对应元素相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 将行列式某一行(或列)的各元素都乘以同一常数后,再加到另一行(或列)的对应元素上,则行列式的值不变.

性质 6 n 阶行列式等于任意一行(或列)所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

这一性质称为行列式按行(或列)展开法则.

四、行列式的计算

(1)对二阶、三阶行列式按定义展开,直接计算.

例 1 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

解 $D=3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$

$=-66-15+10=-71.$

(2)对特殊的行列式,如上(下)三角行列式,其值为主对角线元素的乘积.

(3)按照性质 6,将行列式按某一行(或列)的展开式展开,把行列式转化为低一阶的行列式,如此继续下去,直至降到三阶或二阶行列式,然后直接计算.

(4)利用性质 5,将行列式转化成三角行列式或其他易计算的行列式,然后再计算,这是计算行列式的常用的基本方法.

例 2　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

解　注意到行列式的第四行有两个零元素，在按第四行展开之前还可化简行列式，即将第四列的元素与第二列的元素相加，然后再按第四行的元素展开即可

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

对得到的三阶行列式，将第一行加第三行乘 2 的积，第二行加第三行乘 -1 的积，然后再按第一列展开，可得二阶行列式，就可以计算出 D 的值，即

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 11 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}=31.$$

例 3　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解　$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-2)r_1]{r_3+r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4+(-1)r_3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=(-1)\times 1\times(-1)\times(-2)\times$$

$(-2)=4$

五、克莱姆法则

定理 1(克莱姆法则)　若含有 n 个未知数 n 个方程的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$,则方程组有唯一的解.

$x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$.

其中 $D_j(j=1,2,\cdots n)$是将系数行列式 D 中的第 j 列元素对应换成方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 得到的行列式.

注意:用克莱姆法则解线性方程组必须具备两个前提条件:

(1)方程个数与未知数个数相等;

(2)系数行列式 D 不等于零。

例 4 求解线性方程组:$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$

解 该方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0$.

由克莱姆法则,该方程组有唯一解,同时:

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27 \qquad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27$$

所以,原方程组的解为:

$x_1=\dfrac{D_1}{D}=3,\qquad x_2=\dfrac{D_2}{D}=-4,$

$x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1,\qquad x_4=\dfrac{D_4}{D}=1.$

定理 2 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{10-1-9}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

ī　线性方程组(10-1-9)只有零解.

定理 3　如果非齐次线性方程组无解或有多个解,则其系数行列式 D 为零.

推论 4　如果齐次线性方程组(10-1-9)有非零解,则它的系数行列式为零.

第二节　矩阵的概念及运算

通过对上一节的讨论,我们已经知道,只有当线性方程组的个数等于未知量的个数并且系数行列式不等于零时,才能用克莱姆法则求出线性方程组的解.对于一般线性方程组的讨论,则需要借助矩阵这一重要工具.

一、矩阵的基本概念

例 1　有 A、B 和 C 三个公司,各个季度的产值(单位:万元)见表 10-2-1.

表 10-2-1

公　　司	一 季 度	二 季 度	三 季 度	四 季 度
A	60	70	85	80
B	75	65	80	86
C	89	88	90	92

在这一统计表中,我们去掉表头,将表中的数字写成三行四列的矩形数表,用方括号或圆括号括起来,得数表

$$\begin{pmatrix} 60 & 70 & 85 & 80 \\ 75 & 65 & 80 & 86 \\ 89 & 88 & 90 & 92 \end{pmatrix}$$

这样一个数表,具体描述了三家公司各个季度的产值,同时也揭示了每个公司

的年产值.

1. 矩阵的概念

定义 1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列矩形数表,矩形数表外用圆括号(或方括号)括起来,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵.

通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示矩阵,如上述矩阵就可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为矩阵的元素,简称元,$a_{ij}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元. 一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简单记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

元是实数的矩阵称为**实矩阵**,元是复数的矩阵称为**复矩阵**. 如果无特殊说明,我们所研究的泛指实矩阵. 所有元均为零的矩阵称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{0}$.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数都等于 n,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶方阵**,记为 $\boldsymbol{A}_n$,即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果两个矩阵具有相同的行数和相同的列数,则称这两个矩阵为**同型矩阵**.

定义 2　如果矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,且对应的元相等,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2.一些特殊的矩阵

(1)只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n)$称为**行矩阵**.

(2)只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$称为**列矩阵**.

(3)形如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 的 n 阶方阵称为 n 阶**对角矩阵**，对角矩阵可记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

(4)形如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 的 n 阶方阵称为 n 阶**单位矩阵**，n 阶单位矩阵也记为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_n$.

(5)当一个 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元全部相等且等于某一数 a 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**数量矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}$$

(6)对于非零矩阵，若满足：矩阵若有零行(元全为数 0 的行)，零行一定在矩阵的最下方；矩阵各非零行第一个非零元所在列中，该元下方的元都为零，则称该矩阵为**阶梯形矩阵**. 例如，下列两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(7)对于阶梯形矩阵，若它还满足：各非零行的第一个非零元都为 1；各非零行的第一个非零元所在列的其余元均为 0，则称该阶梯形矩阵为**简化阶梯形矩阵**. 例如，下列两个矩阵 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为简化阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法

定义 3　设有两个 $m\times n$ 矩阵

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

将它们的对应元相加所得到的 $m\times n$ 矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

或简记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

由矩阵加法的定义可知，只有同型矩阵才能相加. 显然，矩阵加法具有如下性质：

(1)交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2)结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$.

若把矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的各元变号，则得到矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵的负矩阵，记作 $-\boldsymbol{A}$. 由矩阵的加法和负矩阵可以定义矩阵的减法

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij})_{m\times n}+(-b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n},$$

且有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.

例 2 某种物资(单位：t)从三个产地运往四个城市销售，2008 年第一、第二两个季度的供应方案由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 给定，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 200 & 100 & 150 & 100 \\ 150 & 200 & 250 & 150 \\ 100 & 200 & 350 & 120 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 150 & 75 & 100 & 150 \\ 200 & 150 & 75 & 50 \\ 100 & 120 & 200 & 80 \end{pmatrix}$$

问这两个季度三个产地运往四个城市的各供应量是多少？

解 所求各供应量应是两矩阵之和，即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 200+150 & 100+75 & 150+100 & 100+150 \\ 150+200 & 200+50 & 250+75 & 150+50 \\ 100+100 & 200+120 & 350+200 & 120+80 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}350 & 175 & 250 & 250\\ 350 & 350 & 325 & 200\\ 200 & 320 & 550 & 200\end{pmatrix}$$

2. 数乘矩阵

定义 4　用数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的每一个元所得到的矩阵，称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记作 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$，即

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}$$

数与矩阵相乘适合如下性质：

(1)分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(2)结合律：$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

(3)$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$0\boldsymbol{A}=0$.

3. 矩阵的乘法

定义 5　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积记为 $\boldsymbol{AB}$，若令 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{C}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，即

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列的元 c_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的对应元乘积之和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

进行矩阵乘法时，一定要注意乘的次序，不能随意改变.

若矩阵乘法可以进行，矩阵乘法具有如下性质：

(1)结合律$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$；

(2)分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

例 3 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times3+(-1)\times1 & 2\times2+(-1)\times5 \\ -4\times3+0\times1 & -4\times2+0\times5 \\ 3\times3+1\times1 & 3\times2+1\times5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -12 & -8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

第三节　矩阵的初等行变换与矩阵的秩

矩阵的初等行变换来源于线性方程组的消元解法. 在此，我们介绍矩阵的初等行变换的意义以及如何运用初等行变换将矩阵化为阶梯形矩阵和简化阶梯形矩阵.

一、矩阵的初等行变换

对矩阵的行实施下列三种运算，统称为**矩阵的初等行变换**：

(1)互换矩阵两行的位置(交换第 i、第 j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$)；

(2)以不等于零的数 k 乘矩阵某一行的所有元(k 乘第 i 行，记作 kr_i)；

(3)把矩阵某一行所有元的 k 倍加到另一行的对应元上(第 i 行的 k 倍加到第 j 行上，记作 r_j+kr_i).

例 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，试将矩阵进行下列初等行变换：

(1)交换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 3 行的位置；

(2)用数 3 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行；

(3)将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 3 行的 -4 倍加到第 4 行上.

解 (1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；

$$(2)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\-1&2&1\\1&5&3\\2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{3r_2}\begin{pmatrix}2&-1&-4\\3\times(-1)&3\times2&3\times1\\1&5&3\\2&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\-3&6&3\\1&5&3\\2&1&1\end{pmatrix};$$

$$(3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\-1&2&1\\1&5&3\\2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+(-4)r_3}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&-4\\-1&2&1\\1&5&3\\2+(-4)\times1&1+(-4)\times5&1+(-4)\times3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\-1&2&1\\1&5&3\\-2&-19&-11\end{pmatrix}.$$

关于矩阵初等行变换及其应用的几点说明如下：

(1)对矩阵进行初等行变换，得到新矩阵，原矩阵与新矩阵之间只能画箭头，不能画等号；

(2)应用矩阵的初等行变换可将一个矩阵化为阶梯形矩阵，其方法是：首先使第一行第一个元为1，然后将其下方元全化为0；再将第二行从左至右第一个非零元的下方元全化为零，直至把矩阵化为阶梯形矩阵；

(3)应用矩阵的初等行变换还可将一个阶梯形矩阵化为简化阶梯形矩阵，其方法是：从非零行最后一行起，将该非零行第一个非零元化为1，并将其上方的元全化为0；再将倒数第二个非零行的第一个非零元化为1，并将其上方的元全化为0；直至把矩阵化为简化阶梯形矩阵；

(4)一个矩阵化成的阶梯形矩阵不是唯一的，但化成的简化阶梯形矩阵却是唯一的.

例 2 试将矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵.

解 $$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-3\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-3\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

例 3 试将阶梯形矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 化为简化阶梯形矩阵.

解 $$B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 4 将矩阵 $C=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&-1\\1&3&0&-3&0\\0&-7&3&1&-1\end{pmatrix}$ 化为简化阶梯形矩阵.

解 $$C=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&-1\\1&3&0&-3&0\\0&-7&3&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3(-1)r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&-1\\0&5&-3&1&-1\\0&-7&3&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+7r_2]{r_3+(-5)r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&-1\\0&0&2&-4&4\\0&0&-4&8&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{r_4+2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+(-3)r_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

二、矩阵的秩

矩阵的秩是矩阵本身所具有的属性. 矩阵的秩在讨论线性方程组的解时有很重要的作用. 下面我们介绍矩阵秩的概念及其求法.

将任意一个非零矩阵 $\boldsymbol{D}$ 化为阶梯形矩阵，这个阶梯形矩阵中非零行的行数称为原矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的秩，记作 $r(\boldsymbol{D})$.

例 5　求矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & -11 \end{pmatrix}$ 的秩.

解　根据矩阵秩的概念，只要将矩阵 $\boldsymbol{D}$ 化为阶梯形矩阵，观察阶梯形矩阵中非零行的行数即可得矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的秩. 于是

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & -4 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+2r_1 \\ r_4+4r_1}]{r_2+3r_1} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & -12 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+(-1)r_2]{r_3+\left(-\frac{1}{2}\right)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，$r(\boldsymbol{D})=3$.

在前面的例 2 中,可知 $r(\boldsymbol{A})=3$;例 4 中,$r(\boldsymbol{C})=3$.

第四节　线性方程组的消元解法

对于线性方程组,只有当方程个数与未知量个数相等且系数行列式不等于零时,我们才能用克莱姆法则求出其解.但是,对于含有 n 个未知数、m 个方程的一般方程组解的问题,怎样判定其是否有解?在有解的情况下,解是否唯一?在解不唯一时,解的结构如何等问题,已经不能继续运用克莱姆法则,而是要借助矩阵这一工具来解决.

一、非齐次线性方程组的消元解法

1. 线性方程组的一般形式

对于 n 个未知量,m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{10-4-1}$$

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零,则称此方程组为**非齐次线性方程组**.若常数项全为零,即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{10-4-2}$$

称为与上述非齐次线性方程组(10-4-1)相对应的**齐次线性方程组**.

若以 $\boldsymbol{A}$ 表示方程组(10-4-1)的系数矩阵,$\boldsymbol{X}$ 表示其未知量矩阵,$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 表示其常数项矩阵,则非齐次线性方程组可记作

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b};$$

而与其相对应的齐次线性方程组(10-4-2)可记作

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}.$$

由方程组(10-4-1)中的全体系数及常数项所组成的矩阵称为方程组(10-4-1)的**增广矩阵**,记作 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$,则

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} \tag{10-4-3}$$

2. 非齐次线性方程组的消元解法

解非齐次线性方程组式(10-4-1)的一般方法是：用初等行变换把式(10-4-1)的增广矩阵 $\widetilde{A}$ 化为阶梯形矩阵，求出该阶梯形矩阵所表达的方程组的解，它与式(10-4-1)是同解方程组，再将阶梯形矩阵化为简化阶梯形矩阵，于是也就得出了式(10-4-1)的解. 这一方法称为**消元法**. 下面举例说明利用消元法来求解一般的线性方程组.

例 1　解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \end{cases} \tag{10-4-4}$$

解　将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形矩阵：

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+(-2)r_1 \\ r_3(-1)r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{11}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2+2r_3 \\ r_1+(-1)r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1(-3)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

最后一个矩阵即为简化阶梯形矩阵，而正数第 5 个矩阵为阶梯形矩阵.

于是得所给方程组的解为$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=-2 \end{cases}$

例 2 解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=-1 \\ 3x_1-2x_2-x_3+2x_4=4 \end{cases} \tag{10-4-5}$$

解 先写出这个方程组的增广矩阵，然后作初等行变换，将增广矩阵化为阶梯形矩阵，有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+(-1)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{5}\right)r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

上面最后一个矩阵是一个阶梯形矩阵，它所对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_2=x_3=-1 \\ x_3-x_4=-1 \end{cases}$$

现在可通过解这个方程组得到式(10-4-5)的解，我们还可以将上面的阶梯形矩阵化为简化阶梯形矩阵来求出线性方程组(10-4-5)的解.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+(-1)r_3]{r_1+(-2)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

这个简化阶梯形矩阵所对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_3-x_4=-1 \end{cases}$$

其解为

$$\begin{cases} x_1=1-x_4 \\ x_2=-x_4 \\ x_3=x_4-1 \end{cases} \tag{10-4-6}$$

还可以令 $x_4=c$，可得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=1-c \\ x_2=-c \\ x_3=c-1 \\ x_4=c \end{cases} \quad (\text{其中 } c \text{ 为任意常数}) \tag{10-4-7}$$

式(10-4-6)是式(10-4-5)的一般解，它也表示了式(10-4-5)的所有解. 其中 x_4 称为自由未知数或自由元，自由元的取法不是唯一的. 式(10-4-7)也是方程组的一般解.

例 3　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+2x_3=4 \\ x_1+x_2+4x_3=7 \end{cases}$$

解　将方程组的增广矩阵化为阶梯形矩阵.

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+(-3)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

在这里出现了矛盾方程：$0=5$，说明已知方程组是一个矛盾方程组，所以此方程组无解.

二、线性方程组解的判定

对 n 个未知量、m 个方程的非齐次线性方程组式(10-4-1)的解，有如下判定定理：

定理　非齐次线性方程组式(10-4-1)有解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与其增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的秩相等，即 $r(\boldsymbol{A})=r=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})$.

(1)当 $r=n$(未知数的个数)时，有唯一解；

(2)当 $r<n$ 时，有无穷多组解，这时自由元的个数为 $n-r(\boldsymbol{A})$个.

推论　齐次线性方程组式(10-4-2)一定有解：

(1)当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，仅有零解；

(2)当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，有非零解.

由此可知，当方程的个数 m 小于未知量个数 n 时，方程组一定有非零解.

例 4　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

解 因为方程组中方程的个数 3 小于未知量个数 4，所以方程组一定有非零解.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\left(-\frac{1}{3}\right)r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由上述简化阶梯形矩阵知，若取 $x_3=c_1$，$x_4=c_2$，则方程组的解是

$$\begin{cases}x_1=2c_1+\frac{5}{3}c_2\\x_2=-2c-\frac{4}{3}c_2\\x_3=c_1\\x_4=c_2\end{cases}\quad (\text{其中 } c_1,c_2 \text{ 为任意常数}).$$

附　　录

附录 1　积 分 表

一、含有 $ax+b$ 的积分

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

2. $\int (ax+b)^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{a(\mu+1)}(ax+b)^{\mu+1}+C \quad (\mu \neq -1)$

3. $\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|)+C$

4. $\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln|ax+b|\right]+C$

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

7. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right)+C$

8. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3}\left(ax+b-2b\ln|ax+b|-\frac{b^2}{ax+b}\right)+C$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)}-\frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

二、含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

10. $\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

11. $\int x\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

12. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{105a^3}(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{15a^3}(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{ax+b}+C$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C & (b>0) \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C & (b<0) \end{cases}$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

17. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx = 2\sqrt{ax+b}+b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

18. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

三、含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

19. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

20. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

21. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

四、含有 $ax^2+b(a>0)$ 的积分

22. $\int \frac{dx}{ax^2+b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}x+C & (b>0) \\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{-b}}\right|+C & (b<0) \end{cases}$

23. $\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|+C$

24. $\int \frac{x^2}{ax^2+b}dx = \frac{x}{a}-\frac{b}{a}\int \frac{dx}{ax^2+b}$

25. $\int \frac{dx}{x(ax^2+b)} = \frac{1}{2b}\ln \frac{x^2}{|ax^2+b|} + C$

26. $\int \frac{dx}{x^2(ax^2+b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{ax^2+b}$

27. $\int \frac{dx}{x^3(ax^2+b)} = \frac{a}{2b^2}\ln \frac{(ax^2+b)}{x^2} - \frac{1}{2bx^2} + C$

28. $\int \frac{dx}{(ax^2+b)^2} = \frac{x}{2b(ax^2+b)} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{ax^2+b}$

五、含有 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的积分

29. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & (b^2<4ac) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C & (b^2>4ac) \end{cases}$

30. $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

六、含有 $\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$ 的积分

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$

34. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$

35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

36. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$

38. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$

39. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

40. $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

41. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3}+C$

42. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

43. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2}+a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$

44. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

七、含有$\sqrt{x^2-a^2}\,(a>0)$的积分

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$

47. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2}+C$

48. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

50. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}\,dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

51. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}+C$

52. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

53. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

54. $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

55. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+C$

56. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

57. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C$

58. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

八、含有$\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$的积分

59. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

60. $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

61. $\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\sqrt{a^2-x^2}+C$

62. $\int\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

63. $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

64. $\int\frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

65. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

66. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

67. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

68. $\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

69. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

70. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

71. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}+a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

72. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

九、含有 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}\,(a>0)$ 的积分

73. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$

74. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$

75. $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$

76. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}=\frac{-1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

77. $\int \sqrt{c+bx-ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

78. $\int \frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

十、含有 $\pm\frac{x-a}{x-b}$ 或 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分

79. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})+C$

80. $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$

81. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\ (a<b)$

82. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\quad(a<b)$

十一、含有三角函数的积分

83. $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$

84. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

85. $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

86. $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

87. $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$

88. $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

89. $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$

90. $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

91. $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$

92. $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

93. $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

94. $\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

95. $\int \sin^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\mathrm{d}x$

96. $\int \cos^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\mathrm{d}x$

97. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}x}$

98. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2}x}$

99. $\int \cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

100. $\int \sin ax\cos bx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C \quad (a \neq b)$

101. $\int \sin ax\sin bx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C \quad (a \neq b)$

102. $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C \quad (a \neq b)$

103. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2 > b^2)$

104. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

105. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \quad (a^2 > b^2)$

106. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

107. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C$

108. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x + a}{b\tan x - a}\right| + C$

109. $\int x\sin ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C$

110. $\int x^2\sin ax \mathrm{d}x = -\frac{1}{a}x^2\cos ax + \frac{2}{a^2}x\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax + C$

111. $\int x\cos ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C$

112. $\int x^2\cos ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + C$

十二、含有反三角函数的积分(其中 $a > 0$)

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

116. $\int \arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a}-\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}+C$

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$

119. $\int \arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a^2+x^2)\arctan\frac{x}{a}-\frac{ax}{2}+C$

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{6}x^2+\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)+C$

十三、含有指数函数的积分

122. $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$

123. $\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}+C$

124. $\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}(ax-1)\mathrm{e}^{ax}+C$

125. $\int x^n\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}x^n\mathrm{e}^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$

126. $\int xa^x\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln a}a^x-\frac{1}{(\ln a)^2}a^x+C$

127. $\int x^na^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}x^na^x-\frac{n}{\ln a}\int x^{n-1}a^x\mathrm{d}x$

128. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

129. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)+C$

130. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin^n bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2n^2}\mathrm{e}^{ax}\sin^{n-1}bx(a\sin bx-nb\cos bx)+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}$
$\int \mathrm{e}^{ax}\sin^{n-2}bx\mathrm{d}x$

131. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos^n bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2n^2}\mathrm{e}^{ax}\cos^{n-1}bx(a\cos bx+nb\sin bx)+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}$
$\int \mathrm{e}^{ax}\cos^{n-2}bx\mathrm{d}x$

十四、含有对数函数的积分

132. $\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$

133. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C$

134. $\int x^n \ln x\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$

135. $\int (\ln x)^n \mathrm{d}x = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$

136. $\int x^m (\ln x)^n \mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$

附录2　初等数学常用公式

一、代数

1. 乘法及因式分解

(1)$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

(2)$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^2$

(3)$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

(4)$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

(5)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$($n$ 为正整数)

2. 二项式定理

$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n$

3. 绝对值与不等式

(1)定义:$|a|=\begin{cases}a, a\geqslant 0\\ -a, a<0\end{cases}$

(2)性质

$|a|=|-a|$,$|ab|=|a||b|$,$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$,$|a|\leqslant A\Leftrightarrow -A\leqslant a\leqslant A$ $|a\pm b|\leqslant |a|+|b|$,$|a\pm b|\geqslant |a|-|b|$

4. 指数

(1)$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　(2)$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

(3)$(ab)^m=a^m\cdot b^m$　　(4)$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(5)$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$　　(6)$a^0=1(a\neq 0)$

5. 对数

设 $a>0$,$a\neq 1$,则

(1)$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$　　(2)$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(3) $\log_a x^b = b\log_a x$　　(4) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

(5) $a^{\log_a x} = x, \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

6. 某些数列前 n 项的和

(1) $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}(|q| \neq 1)$

(2) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

(3) $1 + 3 + 5 + \cdots + n(2n-1) = n^2$

(4) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

(5) $1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

二、几何

1. 三角形

面积 $s = \dfrac{1}{2}ah$，a 为底长，h 为底边上的高；或面积 $s = ab\sin C$，a，b 为两夹边的长，C 为这两边的夹角.

2. 平行四边形

面积 $s = bh$，b 为底长，h 为高.

3. 梯形

面积 $s = \dfrac{1}{2}(a+b)h$，a，b 分别为上、下底边的长，h 为底边上的高.

4. 圆

周长 $C = 2\pi r$，面积 $s = \pi r^2$，r 为半径.

5. 扇形

面积 $s = \dfrac{1}{2}r^2\alpha$，$\alpha$ 为扇形的圆心角，以弧度为单位，r 为半径. 面积 $s = \dfrac{1}{2}rl$，r 为半径，l 为弧长，其中 $l = r\alpha$.

6. 圆柱体

体积 $V = \pi r^2 h$，侧面积 $L = \pi rl$，r 为底面半径，h 为高.

7. 圆锥体

体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$，侧面积 $L=\pi rl$，r 为底面半径，h 为高，l 为斜高.

8. 球

体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，表面积 $S=4\pi r^2$，r 为球的半径.

三、三角

1. 度与弧度

$1^\circ=\frac{\pi}{180}\mathrm{rad}$，$1\mathrm{rad}=\frac{180^\circ}{\pi}$

2. 平方关系

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$1+\tan^2 x=\sec^2 x$，$1+\cot^2 x=\csc^2 x$

3. 两角和与差的三角函数

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$

4. 和差化积公式

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

5. 积化和差公式

$2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$

$2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$

$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$

$-2\sin x\sin y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$

四、平面解析几何

1. 距离与斜率

已知两点 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$，则

(1)两点间的距离：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2)线段 P_1P_2 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

2. 直线的方程

(1)点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$

(2)斜截式 $y=kx+b$

(3)两点式 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

(4)截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

3. 两直线的夹角

设两直线的斜率分别为 k_1,k_2，夹角为 θ，则 $\tan\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$.

4. 点到直线的距离

点 $P(x_1,x_2)$ 到直线：$Ax+By+C=0$ 的距离：$d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

5. 圆

方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心为 (a,b)，半径为 r.

6. 三角形

方程：$y^2=2px$，焦点 $(\dfrac{p}{2},0)$，准线 $x=-\dfrac{p}{2}$.

方程：$y=ax^2+bx+c$，顶点坐标 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴方程 $x=-\dfrac{b}{2a}$.

7. 椭圆

方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，焦点在 x 轴上.

8. 双曲线

方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，焦点在 x 轴上；

等轴双曲线

方程：$xy=k$.

9. 直角坐标与极坐标间的关系

$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan\dfrac{y}{x}$.

10. 方程与曲线形状的关系

若一般二元二次方程 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，$\Delta=B^2-AC$，

(1)若 $\Delta<0$，方程为椭圆；

(1)若 $\Delta>0$，方程为双曲线；

(1)若 $\Delta=0$，方程为抛物线.

文献

[1] 张爱真,刘大彬.高等数学[M].Ж　:Ж　师范大学出版社,2009.

[2] 同济大学数学系.高等数学[M].6版.Ж　:高等教育出版社,2010.

[3] 李海军,彭瑞萍,黄明秋.高等数学[M].长沙:中南大学出版社,2008.

[4] 闫德明.高等数学[M].Ж　:清华大学出版社,2012.

[5] 居余马.线性代数[M].Ж　:清华大学出版社,2013.